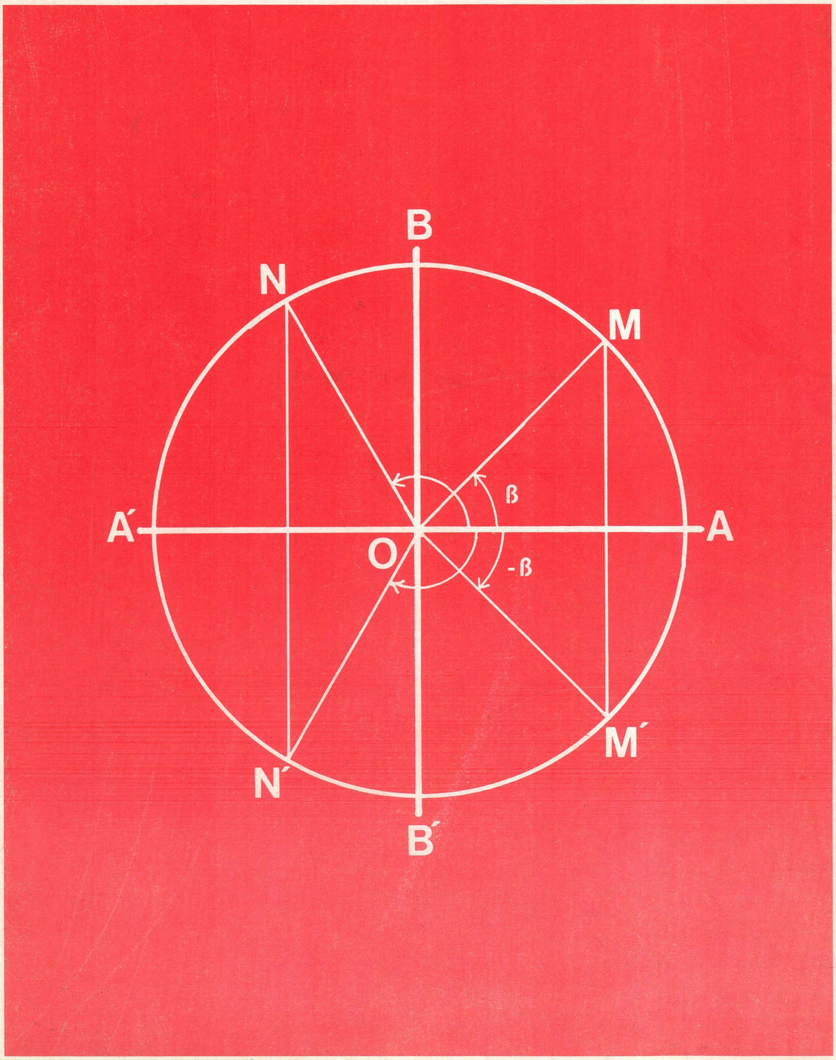
مثلثات



سال دوم

آموزش متوسطهٔ عمومی - ریاضی و فیزیک

جمهوری اسلامی ایران
وزارت آموزش و پرورش
تعلیم و تعلم عبادت است

۲۳۰

بسم الله الرحمن الرحیم

مثلثات

سال دوم

آموزش متوسطهٔ عمومی

ریاضی و فیزیک

شرکت چاپ و نشر ایران
تهران ـ کیلومتر ۱۵ جاده مخصوص کرج
خیابان داروپخش ـ تلفن: ۴ ـ ۹۴۱۱۵۱

۱۳۷۰

مؤلفان ● علی حسن‌زاده ماکوئی ● هوشنگ طاهری ● احمد فیروزنیا

به پیشنهاد دفتر تحقیقات و برنامه‌ریزی، این کتاب در سال تحصیلی ۶۱ ـ ۱۳۶۰ در گروه تحقیق دانشگاه صنعتی اصفهان و دانشگاه اصفهان با همکاری دبیران ریاضی آن منطقه مورد تجدیدنظر قرارگرفته است .

- صفحه پرداز: نجمةالسادات پیمبری
- رسام: خسرو مدیریان
- چاپ از: مطبوعات

مبارزهٔ علمی برای جوانان، زنده کردن روح جستجو و کشف واقعیّتها و حقیقتها است. و امّا مبارزهٔ عملی آنان در بهترین صحنه‌های زندگی و جهاد و شهادت شکل گرفته است.

امام خمینی «قدّس سرّه الشّریف»

فهرست

پیشگفتار

واژه «مثلثات»[1] در زبان یونانی از دوکلمهٔ «$\tau\rho\iota\gamma o\nu o\delta$» و «$\mu\varepsilon\tau\rho o\upsilon$» که به‌ترتیب به معنای «مثلث» و«انـدازه گیری» هستند، مشتق شده است. موضوع این‌رشته از ریاضیات بررسی روابط بین‌اضلاع و زوایای مثلث‌ها می‌باشد.

یکی‌از اهداف عمدهٔ مثلثات بدست‌آوردن فرمولهائی است‌که توسط‌آنها بتوان‌فاصله‌ها را بطور غیرمستقیم اندازه‌گیری نمود.در درس هندسه دیده‌اید‌که چگونه با در دست داشتن‌سه جزء از یك‌مثلث، که‌یکی از‌آنها ضرورتاً میبایستی یك‌ضلع باشد، یك‌مثلث را می‌توان ساخت. هنگامی‌که مقادیرعددی این اجزای سه‌گانه مفروض باشند، درآن صورت مثلثات شما را قادر می‌سازدکه مقادیر اجزاء نامعلوم مثلث را محاسبه نمائید.

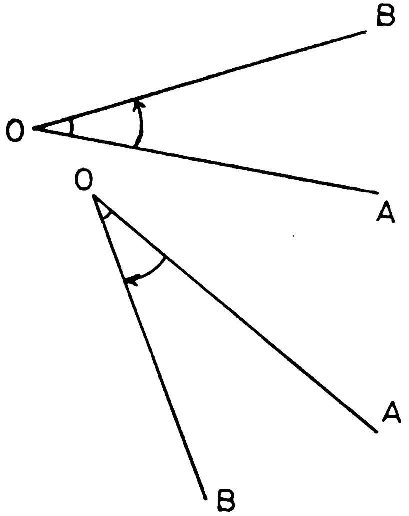
مهندسین نقشه‌بردار با استفاده از مترهای فلزی و دستگاههای زاویه‌یاب به‌ترتیب فواصل و زوایا را اندازه مـی گیرند. آنگاه با استفاده از مثلثات، فواصل و زوایـای دیگررا محاسبه می‌کنند. بدین ترتیب‌آنها قادر می‌شوند برای ساختمانهای‌گونا گون، نقشه‌هاومشخصات لازم‌را تهیه‌نمایند. مثلثات بطور پیوسته وبنحوی وسیع درنقشه‌برداری، دریانوردی، فیزیك، مهندسی‌و نجوم مورد استفاده قرار می گیرد. بدون مثلثات ، نقشه‌برداری و دریانوردی با اشکال‌های بسیار روبرو می‌شوند، و از جمله آنکه فواصل بین زمین تا خـورشید ، ماه و ستارگان تا امروز تعیین نشده باقی می‌ماندند.

1– Trigonometry

فصل اول

زاویه و واحدهای اندازه‌گیری آن

(۱-۱)- زاویه (درصفحه)



مفهوم زاویه توسط دوران یك خط مستقیم حول یك نقطهٔ ثابت روی آن خط، موسوم به رأس بدست می‌آید. بدین منظور خط مستقیمی که از یك وضعیت ثابت مانند OA (شکل ۱) حول نقطهٔ O درجهت یا در خلاف جهت عقربه‌های ساعت دوران کند، در نظر می‌گیریم. فرض کنید که بوضعیت OB برسد. در دوران از OA به OB زاویه $\angle AOB$ مشخص می‌شود. اگر خط OB درهمان جهت قبلی بدوران خود ادامه دهد، تا اینکه بوضعیت اصلی خود یعنی OA برسد، در اینصورت گوئیم یك دوران کامل انجام گرفته است.

(شکل ۱)

دراین مرحله به‌تعریف سه واحد که برای اندازه گیری زاویه بکارمی‌روند، می‌پردازیم:

الف - درجه ــ یك درجه زاویه‌ای است که از دوران نیم‌خطی مانند OA حول نقطهٔ O به اندازه $\frac{۱}{۳۶۰}$ یك دوران کامل، بدست آید. برای نشان دادن اندازهٔ یك زاویه به‌درجه، از علامت $^\circ$ استفاده می‌کنیم. اجزای درجه، دقیقه‌وثانیه هستند که هردقیقه $\frac{۱}{۶۰}$ درجه وهر ثانیه $\frac{۱}{۶۰}$ دقیقه است که به‌ترتیب برای‌نشان دادن‌آنها ازعلامات $'$ و $''$ استفاده می‌کنیم. برای مثال اگراندازهٔ زاویهٔ $\angle AOB$ برابربا ۱۲ درجه و ۷ دقیقه و ۱۹ ثانیه باشد، آنرا چنین می‌نویسیم:

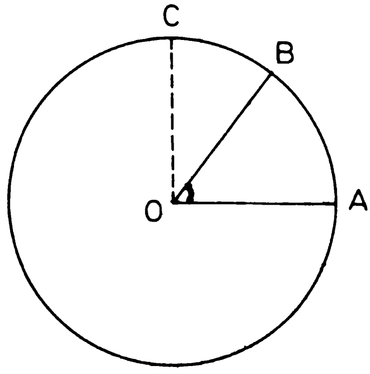
$$\angle AOB = ۱۲^\circ \text{، } ۷' \text{، } ۱۹''$$

ب - گراد ــ یك گراد زاویه‌ای است که توسط دوران نیم‌خطی مانند OA حول نقطه O به اندازه $\frac{۱}{۴۰۰}$ یك دوران کامل بدست آید. برای نشان دادن اندازه یك زاویه به گراد، ازعلامت gr استفاده میکنیم. دراندازه گیری زوایای کوچکتر از یك گراد، از دسیگراد برابر با $\frac{۱}{۱۰}$ گراد، سانتی گراد برابر با $\frac{۱}{۱۰۰}$ گراد ومیلیگراد برابربا $\frac{۱}{۱۰۰۰}$ گراد استفاده می‌شود. برای مثال

اگر اندازهٔ زاویهٔ $\angle AOB$ برابر با ۳۹ گراد و ۴ دسیگراد و ۷ میلیگراد باشد، آن را چنین می‌نویسیم:

$$\angle AOB = ۳۹/۴۰۷gr$$

پ ـ رادیان ـ فرض کنید که در دایره‌ای به‌مرکز O (شکل ۲)، OB از دوران حول نقطهٔ O از شعاع OA بدست آمده باشد به طوری که طول کمان $\overset{\frown}{AB}$ برابر با شعاع دایره گردد. زاویه $\angle AOB$ که بدین ترتیب بدست می‌آید یك رادیان می‌باشد. دلیل اینکه رادیان نامیده‌می‌شود اینست که این واحد مستقل از شعاع است. زیرا چنان که می‌دانید نسبت محیط هر دایره به قطر آن مقداری است ثابت و این مقدار ثابت را به «π»[1] نشان می‌دهند. اگر شعاع دایره l فرض شود (l برحسب یکی از واحدهای اندازه‌گیری طول مثلاً متر می‌باشد). خواهیم داشت:



(شکل ۲)

$$\text{محیط دایره} = ۲\pi l$$

$$\text{اندازه محیط دایره برحسب رادیان} = \frac{\text{محیط دایره}}{\text{طول کمانی برابر با شعاع دایره}} = \frac{۲\pi l}{l} = ۲\pi$$

بنا بر این محیط هر دایره ۲π رادیان می‌باشد و یا هر رادیان $\frac{۱}{۲\pi}$ محیط دایره است.

اگر اندازهٔ کمان AC واقع بر محیط دایره (شکل ۲) برابر با $\frac{۱}{۴}$ محیط دایره باشد اندازه زاویه مرکزی مقابل به‌آن را برحسب رادیان به‌صورت زیر می‌نویسیم:

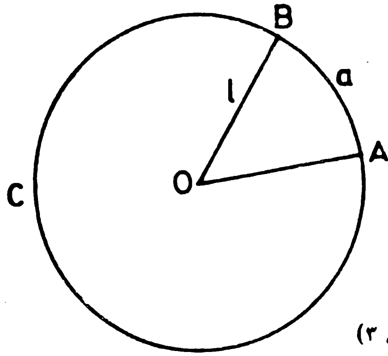
$$\overset{\frown}{AC} = \frac{۲\pi}{۴} = \frac{\pi}{۲}$$

برای نوشتن اندازه زاویه برحسب رادیان از علامت اختصاری rad استفاده می‌شود مثلاً اندازهٔ زاویهٔ مرکزی مقابل به‌کمانی را که $\frac{۱}{۶}$ محیط دایره است بصورت $\frac{\pi}{۳}rad$ می‌نویسند.

۱ـ π (پی) عددی است گنگ که مقدار تقریبی آن ...۳/۱۴۱۵۹۲۶۵۳۵ می‌باشد. در محاسبه‌های معمولی مقدار تقریبی π را برابر با ۳/۱۴۱۶ و یا ۳/۱۴ می‌گیرند. عکس عدد π یعنی $\frac{۱}{\pi}$ با تقریب چهار رقم اعشار برابر با ۰/۳۱۸۳ است.

(۱-۲)- تبدیل واحدهای اندازه‌گیری به یکدیگر

اگر در دایره‌ای به‌شعاع l (شکل ۳) طول کمانی برابر با a (l و a برحسب یکی از واحدهای طول مثلا متر می‌باشند) و اندازهٔ زاویهٔ مرکزی مقابل به این کمان بر حسب درجه D و برحسب گراد G و برحسب رادیان R باشد داریم:



(شکل ۳)

$$a = \frac{۲\pi l G}{۴۰۰} \quad \text{و یا} \quad a = \frac{۲\pi l R}{۲\pi}$$

$$\text{و یا} \quad a = \frac{۲\pi l \cdot D}{۳۶۰}$$

از رابطه‌های بالا می‌توان نتیجه گرفت:

$$(I) \quad \frac{D}{۱۸۰} = \frac{G}{۲۰۰} = \frac{R}{\pi}$$

از (I) می‌توان برای تبدیل واحدها به‌یکدیگر استفاده کرد.

مثال ۱ - اندازهٔ زاویه‌ای °۳۶ است اندازهٔ آن را برحسب گراد و رادیان بنویسید.

با توجه به (I) داریم $\frac{۳۶}{۱۸۰} = \frac{G}{۲۰۰} = \frac{R}{\pi}$ از آنجا نتیجه می‌شود که ۳۶ درجه معادل ۴۰ گراد و $\frac{\pi}{۵}$ رادیان است.

مثال ۲ - اندازهٔ زاویه‌ای برحسب گراد $۲۲/۴G$ است، اندازهٔ آن را برحسب درجه و رادیان بنویسید.

داریم $\frac{۲۲/۴}{۲۰۰} = \frac{D}{۱۸۰} = \frac{R}{\pi}$ از آنجا نتیجه می‌شود که ۲۲/۴ گراد معادل "۳۶ و '۹ و °۲۰ و برابر با $۰/۱۱۲\pi$ رادیان است.

مثال ۳ - اندازهٔ زاویه‌ای $\frac{\pi}{۸}$ رادیان است اندازهٔ آن را برحسب درجه و گراد بنویسید.

$$\text{داریم} \quad \frac{\frac{\pi}{۸}}{\pi} = \frac{D}{۱۸۰} = \frac{G}{۲۰۰}$$

از اینجا نتیجه می‌شود که $\frac{\pi}{۸}$ رادیان معادل '۳۰ ، °۲۲ و ۲۵ گراد است.

جهت‌ها و زاویه مثلثاتی

(۱-۳)- دایرهٔ جهت‌دار و اندازهٔ جبری زاویه‌ها

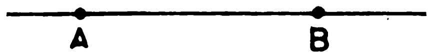
در روی یك خط راست AB برای رفتن از یك نقطهٔ A به نقطه دیگر B فقط یك راه

وجود دارد و فاصله از A تا B یعنی AB کاملا مشخص است.

ولی در روی یك دایره برای رفتن از نقطهٔ A به نقطهٔ B می‌توان دو جهت اختیار کرد:

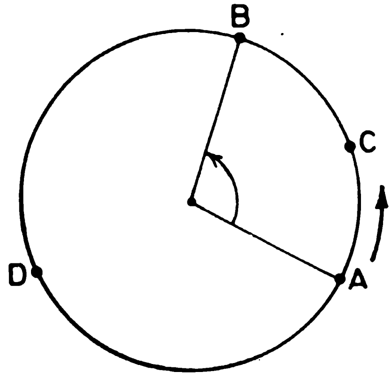
الف ـ جهت ACB،

ب ـ جهت ADB.



در هریك از این دوجهت می‌توان طول راه را به‌دلخواه انتخاب کرد.

مثلا اگر جهت ACB اختیار شود می‌توان مسیر را کمان هندسی ACB در نظر گرفت و یا پس از طی چند دور دایره سپس کمان هندسی ACB را طی کرد. (شکل ۴)



(شکل ۴)

برای درك بهتر این مطلب باید توجه داشت که در بیشتر نیازمندیهای عملی فیزیك و مکانیك کاربرد زاویه‌های بیشتر از ۳۶۰° مورد نیاز است مثلاً پروانهٔ هواپیما وچرخ ماشینها، می‌توانند در هرواحد زمان (ثانیه، دقیقه، ...) چندین مرتبه دور محور خود دوران کنند. اگر پروانهٔ یك هواپیما درمدت یك ثانیه ۴ دور و $\frac{۲}{۵}$دور حول محور خود دوران کند زاویه‌ای را که در این مدت طی کرده است برابر است با

مسافت طی شده در یك ثانیه برحسب درجه $\quad ۴\times۳۶۰^\circ+\frac{۲}{۵}\times۳۶۰^\circ=۴\times۳۶۰^\circ+۱۴۴^\circ$

مسافت طی شده در یك ثانیه برحسب گراد $\quad ۴\times۴۰۰+\frac{۲}{۵}\times۴۰۰=۴\times۴۰۰+۱۶۰$

مسافت طی شده در یك ثانیه برحسب رادیان $\quad ۴\times۲\pi+\frac{۲}{۵}\times۲\pi=۴\times۲\pi+\frac{۴\pi}{۵}$

این گونه کمانها را کمانهای مثلثاتی مینامیم.

تمرین

۱ـ اندازهٔ هریك از زاویه‌های زیر را برحسب رادیان و گراد به‌دست آورید:

$(۳۰'' \,,\, ۵۲' \,,\, ۱۶^\circ)$ ، $(۳۰' \,,\, ۱۱۲^\circ)$ ، ۲۱۰° ؛ ۷۵° ، ۱۵°

۲ـ اندازهٔ هریك از زاویه‌های زیر را که به گـراد داده شده است برحسب درجه و رادیان بنویسید:

$$۱۸۶\frac{۲}{۳} \quad و \quad ۷۵ \quad و \quad ۶۶\frac{۲}{۳} \quad و \quad ۵۰$$

۳ـ اندازهٔ هـر یك از زوایای زیر را که به رادیـان می‌باشد برحسب درجه و گـراد بنویسید :

$$\frac{۱۱\pi}{۶} \; و \; \frac{۴\pi}{۳} \; و \; \frac{\pi}{۳} \; و \; \frac{\pi}{۵} \; و \; \frac{\pi}{۱۰} \; و \; \frac{\pi}{۱۲}$$

۴ـ درساعت ۲ و ۳۰ دقیقه عقربه‌های ساعت‌شمار و دقیقه‌شمار چه زاویه‌ای با یکدیگر می‌سازند؟

۵ـ چه زاویه‌ای است که اگر بر اندازه‌اش به‌حسب درجه‌عدد ۱۵ افزوده شوداندازهٔ آن برحسب گراد به‌دست آید؟

۶ـ در مثلث ABC ، $A=۹۰^\circ$ و اندازهٔ زاویهٔ C برحسب درجـه برابر $\frac{۱۸}{۵}$ انـدازهٔ زاویهٔ B به حسب گراد است مطلوب است اندازه‌های زوایای B و C برحسب رادیان.

۷ـ اگرمجموع اندازه‌های دو زاویه برحسب درجه $۳۶۰^\circ K - ۳۰^\circ$ وتفاضل همان دو زاویه برحسب رادیان $x-y=۲\pi k' + \frac{\pi}{۴}$ باشد اندازهٔ آن دو زاویه را برحسب درجـه تعیین کنیدکه درآن $k\in Z$.

(۱-۴) ـ جهت مثلثاتی

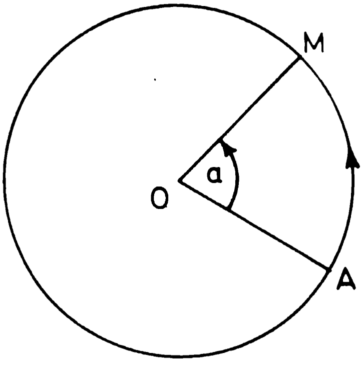
در مثلثات جهت ACB را (مخالف جهت حرکت عقربه‌های ساعت) جهت مثبت وجهت ADB را (موافق‌حرکت‌عقربه‌های‌ساعت)جهت‌منفی‌می گیرند(شکل۴) مثلاً اگرطول کمان‌هندسی AB برابر با $\frac{۱}{۳}$ محیط دایره باشد کمان ACB برابر ۱۲۰° وکمان ADB برابر با -۲۴۰° می باشد.

(۱-۵)ـ زاویه مثلثاتی

متحرکی ازمبدأ A با جهت ثابت (مثبت یامنفی) کمان AM رامی‌پیماید (شکل۵). پس ازآن‌که صفریا ۱ یا ۲ .... یا K مرتبه دایره را طی کرد به نقطه M میرسد اگرزاویه مرکزی مقابل به‌کمان‌هندسی AM برابربا α°باشد، دراینصورت‌اندازه جبری‌زاویه مثلثاتی $\angle AOM$ برابراست با:

$K\times ۳۶۰+\alpha$ درجه یـا $۲K\pi+\frac{\pi\alpha}{۱۸۰}$ رادیان یـا $K\times ۴۰۰+\frac{۲۰۰\alpha}{۱۸۰}$ گرادکه در

آن $K \in Z$.



(شکل ۵)

برای مثال اگر $\widehat{a} = ۴۵^\circ$ در اینصورت اندازه جبری زاویه مثلثاتی نظیر برابراست با $۴۵ + ۳۶۰ \times K$درجه‌یا $۲K\pi + \frac{\pi}{۴}$ رادیان یا $۵۰ + ۴۰۰ \times K$ گراد که درآن $K \in Z$.

دراینجا اگرحرکت‌درجهت مثبت‌باشد، K یك عدد درست مثبت یا صفر است واگر حرکت درجهت منفی‌باشد K یك عدد درست منفی‌است برخی‌مواقع بجای «زاویه مثلثاتی» از واژه «کمان مثلثاتی» استفاده میشود که منظورکمانی است‌که روبرو به این زاویه مثلثاتی قرار دارد.

تمرین

۱ــ انتهای کمانهای $\frac{\pi}{۲}$ و π و $\frac{۳\pi}{۲}$ و ۲π رادیان را روی دایرۀ جهت‌دار به مبدأ A معین کنید.

۲ــ به ازای مقدارهای مختلف k $(k \in Z)$ انتهای کمانهائی که به مبدأ نقطه A (انتهای راست قطر افقی دایرۀ جهت دار) بوده و اندازه جبری آنها در زیر داده شده است را مشخص کنید.

الف: $۲k\pi - \frac{\pi}{۴}$ ب: $(۲k + ۱)\pi + \frac{\pi}{۳}$

پ: $\frac{k\pi}{۲} + \frac{\pi}{۶}$ ت: $۲k\pi + \frac{\pi}{۴}$

۳ــ اولا در دایرۀ جهت دار به مبدأ A نقطه‌های M و $M_۱$ و $M_۲$ انتهای کمانهای روبروبه زاویه‌های زیر را تعیین‌کنید:

$$\angle AOM_۱ = -۱۷۵۰gr \text{ و } \angle AOM = ۱۵۴۵^\circ \text{ و } \angle AOM_۲ = -\frac{۶۴۹\pi}{۱۲}$$

ثانیاً تحقیق کنید که نقاط M و $M_۱$ و $M_۲$ رأسهای یك مثلث متساوی‌الاضلاع می‌باشند.

۴ــ برروی دایره جهت‌دار به مرکز O، کمان روبرو به زاویه مثلثاتی $\angle AOM$ به مبدأ A وانتهای M رادرنظرمی گیریم. ثابت کنیدا گر کمانهای روبرو به‌زاویه‌های $\frac{\angle AOM}{۴}$ به

مبدأ A اختیارشوند، انتهای آنها رأسهای یك مربع می‌باشند.

۵- انتهای کمانهایی‌را که دارای‌یك‌مبدأ وروبروبه زاویه‌های α و $\alpha+\frac{\pi}{3}$ و $\alpha+\frac{2\pi}{3}$ می‌باشند را به دست آورید .

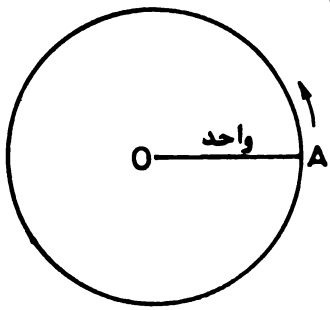
۶- نقطه‌های A، B، M و C روی دایرهٔ جهت‌دار به مرکز O به‌ترتیبی واقعند که M وسط کمان BC است ثابت کنید: $\angle AOM = \frac{\angle AOB + \angle AOC}{2} + k\pi$.

فصل دوم

نسبتهای مثلثاتی و تغییرات آن

(۲-۱) ـ دایرهٔ مثلثاتی

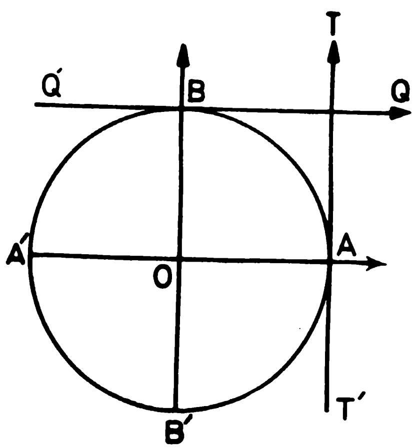
دایرهٔ مثلثاتی دایره‌ای است جهت‌دار که شعاع آن برابر با واحد طول است (واحد اندازه‌گیری برای سنجش کمانهای این دایره و نسبتهای مثلثاتی آنها) و در روی آن نقطه‌ای مانند A بعنوان مبدأ کمانها انتخاب شده است. (شکل ۶)



(شکل ۶)

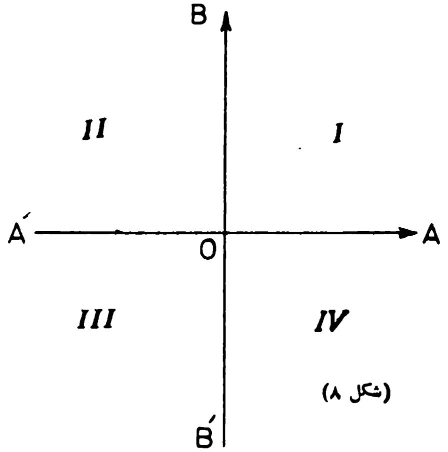
(۲-۲) ـ محورها

دایره مثلثاتی (شکل ۷) را در نظر بگیرید. محوریکه مرکز دایره را به مبدأ کمانها (نقطه A) وصل کرده و جهت مثبت آن، جهت بردار $\overrightarrow{OA}$ است محور کسینوسها نامیده میشود. (این محور معمولا یك خط افقی در نظر گرفته میشود) محوریکه از O (مرکز دایره مثلثاتی) عمود بر محور کسینوسها رسم می‌شود وجهت مثبت آن جهت بردار $\overrightarrow{OB}$ است محور سینوسها نامیده می‌شود. محور $T'AT$ که از A (مبدأ کمانها) موازی و هم‌جهت با محور سینوسها رسم می‌شود «محور تانژانتها» نامیده می‌شود. همچنین محور $Q'BQ$ که از B موازی و هم جهت با محور کسینوسها رسم می‌شود «محور کتانژانتها» نامیده می‌شود. (مرکز دایره یعنی O را مبدأ محور کسینوسها و محور سینوسها انتخاب می‌کنیم همچنین A را مبدأ محور تانژانتها و B را مبدأ محور کتانژانتها انتخاب می‌نمائیم) ضمناً واحد اندازه‌گیری روی هرچهار محور را برابر با شعاع دایره مثلثاتی می‌گیریم.



(شکل ۷)

ناحیه‌های چهارگانه ـ دومحور عمود برهم $A'OA$ و $B'OB$ (شکل ۸) صفحه را به چهار قسمت تقسیم می‌کنند که هریك از آنها موسوم به یك ناحیه می‌باشند.

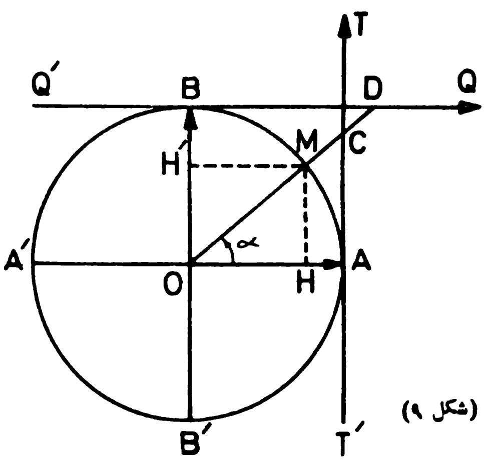


(شکل ۸)

برای سهولت قسمت AOB را ناحیه اول، قسمت $A'OB$ را ناحیه دوم، قسمت $A'OB'$ را ناحیه سوم و بالاخره قسمت $B'OA$ را ناحیه چهارم می‌نامیم.

(۲-۳)ـ نسبتهای مثلثاتی یك زاویه

کمان AM به مبدأ A و انتهای M و به زاویه مرکزی α را درنظرمی گیریم. برحسب **این که نقطهٔ M در یکی از ناحیه‌های چهارگانهٔ دایرهٔ مثلثاتی قرار گیرد حالتهای زیر را خواهیم داشت:**



(شکل ۹)

الف ـ نقطهٔ M در ناحیهٔ اول قرار دارد. مطابق شکل (۹) ازنقطهٔ **M عمودهای MH و MH'** را بر **محور کسینوسها و سینوسها فرود آورده شعاع حامل انتهای کمان یعنی OM را امتداد می‌دهیم تامحور تانژانتها و کتانژانتها را در نقطه‌های C و D قطع کند بنابه تعریف اندازهٔ** جبری $\overrightarrow{OH}$ **روی محور** کسینوسها را **کسینوس و $\overline{OH'}$ (اندازهٔ جبری $\overrightarrow{OH'}$** روی محور **سینوسها) را سینوس و** $\overline{AC}$ (اندازهٔ جبری $\overrightarrow{AC}$ **روی‌محور تانژانتها) را تانژانت و $\overline{BD}$(اندازهٔ** جبری $\overrightarrow{BD}$ روی محور کتانژانتها) را کتانژانت $\angle AOM$ می‌نامیم.

با توجه به تعریف محورها وجهت آنها نتیجه می گیریم که اگر **انتهای کمان روبرو به** زاویه‌ای درناحیه اول باشد، سینوس، کسینوس، تانژانت وکتانژانت آن زاویه مثبت می‌باشند.

باید توجه داشت که در حالت (الف) تعاریف سینوس، کسینوس، تانژانت و کتانژانت در دایرهٔ مثلثاتی همان است که برای نسبتهای مثلثاتی زاویهٔ حاده در مثلث قائم‌الزاویه گفته شده

است زیرا در (شکل ۹) از دایرهٔ مثلثاتی داریم:

$$\sin\alpha=\overline{OH'}\ ,\ \cos\alpha=\overline{OH}\ ,\ tg\alpha=\overline{AC}\ ,\ cotg\alpha=\overline{BD}$$

همچنین در مثلث قائم‌الزاویهٔ OHM :

$$\sin\alpha=\frac{HM}{OM}\ ,\ \cos\alpha=\frac{OH}{OM}\ ,\ tg\alpha=\frac{HM}{OH}\ \text{و}\ cotg\alpha=\frac{OH}{HM}$$

حال با توجه به اندازهٔ جبری پاره خطها و این کـه $OM=1$ (شعـاع دایرهٔ مثلثاتـی به عنوان واحد برای انـدازه‌گیری طول کمانها و پـاره‌خطها در این دایره انتخاب می‌شود) است می‌توان نوشت:

$$\sin\alpha=\frac{\overline{HM}}{\overline{OM}}=\frac{\overline{HM}}{1}=\overline{HM}$$

اما درچهار ضلعی $OHMH'$، $HM=OH'$ و $OH=H'M$

همچنین

$$\cos\alpha=\frac{\overline{OH}}{\overline{OM}}=\frac{\overline{OH}}{1}=\overline{OH}$$

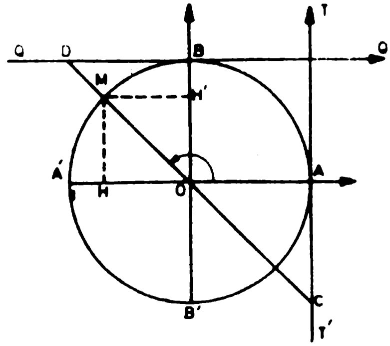
دو مثلث قائم‌الزاویهٔ OAC و OHM متشابهند (چرا؟) از تشابه آنها نتیجه می‌شود که:

$$\frac{\overline{HM}}{\overline{OH}}=\frac{\overline{AC}}{\overline{OA}}\ \text{و یا}\ tg\alpha=\frac{\overline{HM}}{\overline{OH}}=\frac{\overline{AC}}{1}=\overline{AC}$$

دو مثلث قائم‌الزاویهٔ OBD و $OH'M$ متشابهند (چرا؟) ازتشابه دو مثلث نتیجه مـی‌شود

$$\frac{\overline{H'M}}{\overline{OH'}}=\frac{\overline{BD}}{\overline{OB}}\ \text{و یا}\ \frac{\overline{OH}}{\overline{HM}}=\frac{\overline{BD}}{1}\ \text{و یا}\ cotg\alpha=\frac{\overline{OH}}{\overline{HM}}=\overline{BD}$$

ب ـ نقطهٔ M بین B و A' واقع است. مانند حالت اول از M عمود MH و MH' را بـه محور کسینوسها و سینوسهـا فـرود آورده و سپس OM را امتداد می‌دهیم تـا محور تـانـژانتها را در نقطهٔ C و محور کتانـژانتهـا را در نقطهٔ D قطـع کند $\overline{OH}$ را کسینوس و $\overline{OH'}$ را سینوس و $\overline{AC}$ راتانژانت و $\overline{BD}$ را کتانـژانت زاویه α یـا $\angle AOM$ می‌نـامیم به طوری که در



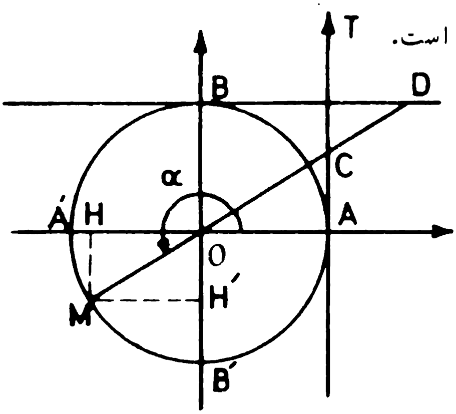
(شکل ۱۰)

شکل ۱۰ دیده می‌شود $\overline{OH'}$ یعنی سینوس کمان AM مثبت، و $\overline{OH}$ و $\overline{AC}$ و $\overline{BD}$ یعنی کسینوس و تانژانت و کتانژانت $\angle AOM$ منفی است یعنی:

$$\sin\alpha = \overline{OH'} > 0 \text{ و } \cos\alpha = \overline{OH} < 0 \text{ و } tg\alpha = \overline{AC} < 0$$

$$cotg\,\alpha = \overline{BD} < 0$$

بنابراین اگر انتهای کمان روبرو به زاویه‌ای درناحیهٔ دوم یعنی $(\frac{\pi}{2} < \widehat{AM} < \pi)$ باشد سینوس آن مثبت وسایر نسبتهای مثلثاتی آن منفی است.

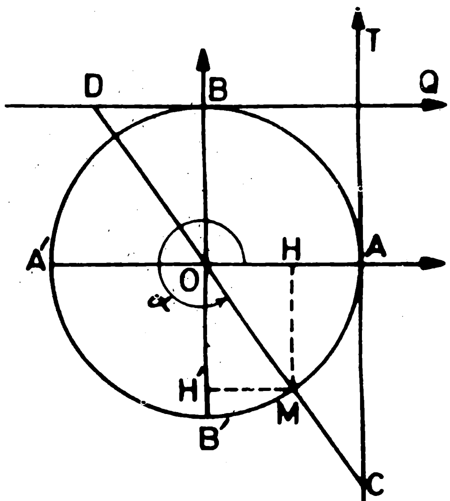


(شکل ۱۱)

پ ـ نقطهٔ M بین A' و B' یعنی در ناحیهٔ سوم قرار دارد. اگر مانند دو حالت قبل عمل کنیم $\overline{OH}$ کسینوس و $\overline{OH'}$ سینوس و $\overline{AC}$ تانژانت و $\overline{BD}$ را کتانژانت $\angle AOM$ می‌نامیم با توجه به شکل(۱۱) نتیجه می‌شود که:

$$\sin\alpha = \overline{OH'} \text{ و } \cos\alpha = \overline{OH} \text{ و } tg\alpha = \overline{AC} \text{ و } cotg\alpha = \overline{BD}$$

بنابراین اگر انتهای کمان روبرو به زاویه‌ای در ناحیهٔ سوم واقع باشد یعنی $(\pi < \widehat{AM} < \frac{3\pi}{2})$ سینوس و کسینوس آن منفی و تانژانت و کتانژانت آن مثبت می‌باشند.



(شکل ۱۲)

ت ـ نقطهٔ M بین A و B' یعنی در ناحیهٔ چهارم واقع شده است. مطابق شکل (۱۲) $\overline{OH}$ کسینوس و $\overline{OH'}$ سینوس و $\overline{AC}$ تانژانت و $\overline{BD}$ کتانژانت زاویه $\angle AOM$ می‌باشد با توجه به شکل می‌توان نتیجه گرفت:

$$\sin\alpha = \overline{OH'},\ \cos\alpha = \overline{OH}$$

$$tg\alpha = \overline{AC},\ cotg\alpha = \overline{BD}$$

بنابراین اگر انتهای کمان روبرو به زاویه‌ای در ناحیهٔ چهارم باشد

یعنی $(\frac{3\pi}{2} < \widehat{AM} < 2\pi)$ کسینوس آن مثبت و سایر نسبتهای مثلثاتی آن منفی می‌باشد.

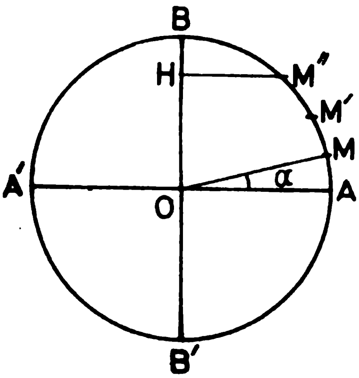
سینوس، کسینوس، تانژانت و کتانژانت یك زاویه که دراین فصل تعریف شده‌اند نسبتهای مثلثاتی نامیده میشوند.

(۲-۴) - تابع مثلثاتی

رابطه‌ای که درمورد هریك از نسبتهای مثلثاتی به‌ازای هرزاویه، نسبت مثلثاتی نظیر به آن زاویه را معین می‌کند یك نسبت مثلثاتی گفته می‌شود. بعنوان مثال تـابـع سینوس رابطه‌ای است‌که به‌ازای هر زاویه مقدار سینوس آن زاویه را تعیین می‌کند.

(۲-۵)- تغییرات نسبتهای مثلثاتی

الف - تغییرات سینوس - وقتی‌که نقطهٔ M انتهای کمان AM روی کمـان AB از A به طـرف B حـرکت‌کند (شکل ۱۳) یعنی اندازهٔ زاویه مرکزی روبرو به کمان از صفرتا $\frac{\pi}{2}$ رادیـان تغییرنمایـد، نقطهٔ H از نقطهٔ O به طـرف نقطهٔ B حرکت‌می‌کند به‌عبارت‌دیگراندازهٔ $\overline{OH}$ ازصفرتایك تغییرمی‌کند وقتی‌که نقطهٔ M برنقطهٔ B منطبق شود یعنی اندازهٔ زاویه برابر $\frac{\pi}{2}$ رادیان گـردد نقطهٔ H برنقطهٔ B منطبق شده یعنی انـدازهٔ آن برابر یـك خواهـد شد و اگـر نقطهٔ M از B به طـرف A' حرکت‌کنـد نقطهٔ H از B به طـرف O برگشت کرده وقتی کـه نقطهٔ M بر نقطهٔ A' منطبق گـردد نقطهٔ H نیز بـر O منطبق خواهد شد. پس اگر انـدازهٔ زاویه‌ای برابر π رادیان بـاشد سینوس آن برابر صفر خواهد شد همچنین اگـر نقطه M از A' به طـرف B' حرکت کند نقطهٔ H' از O به طرف B' حرکت می‌کند وقتی نقطهٔ M بر B' منطبق شود یعنی اندازهٔ زاویهٔ $\angle AOM$ برابر $\frac{3\pi}{2}$ رادیان باشد انـدازهٔ جبری سینوس آن برابر ۱ — خواهد شد مجدداً اگرنقطهٔ M روی‌کمان $B'A$ از B' به‌طرف A حرکت‌کند نقطهٔ H به‌طرف O بازگشت‌می‌کند اگر M بر A منطبق شود یعنی اندازهٔ زاویه $AA'M$ برابر 2π رادیان باشد سینوس‌آن برابر صفر خواهد شد.

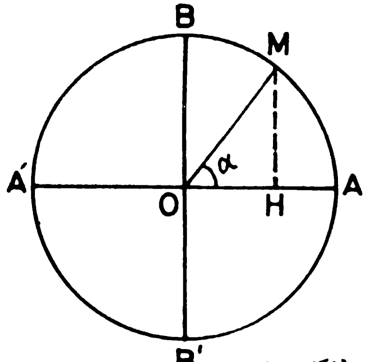


(شکل ۱۳)

جدول زیر مطالب بالا را بطور خلاصه نشان می‌دهد.

کمان α	0	$\nearrow$	$\frac{\pi}{2}$	$\nearrow$	π	$\nearrow$	$\frac{3\pi}{2}$	$\nearrow$	2π
$\sin\alpha$	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	0	$\searrow$	-1	$\nearrow$	0

(درجدول بالا $\nearrow$ علامت افزایش و $\searrow$ علامت کاهش است).

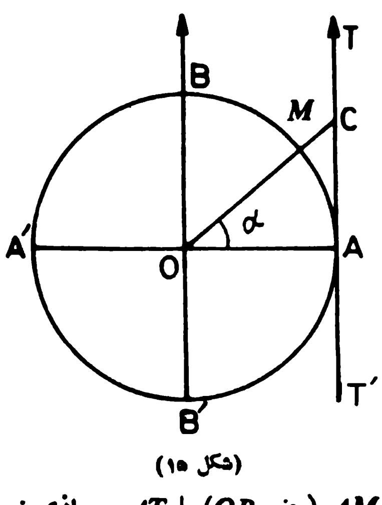


(شکل ۱۴)

ب - تغییرات کسینوس - اگر در تغییرات انتهای کمان AM روبرو به زاویه $\angle AOM$ روی دایرهٔ مثلثاتی (شکل ۱۴) به تغییرات کسینوس دقت شود ملاحظه می‌کنیم وقتی که نقطهٔ M از نقطهٔ A به طرف B حرکت کنند نقطهٔ H از A به‌نقطهٔ O نزدیك می‌شود واندازهٔ OH از یك تا صفر تغییرمی‌کند. به‌همین ترتیب اگرمانند حالت‌قبل نقطهٔ M روی‌دایرهٔ مثلثاتی به‌طرف A حرکت‌کندکسینوس $\angle AOM$ مطابق جدول زیر تغییر خواهد کرد.

کمان α	0	$\nearrow$	$\frac{\pi}{2}$	$\nearrow$	π	$\nearrow$	$\frac{3\pi}{2}$	$\nearrow$	2π
$\cos\alpha$	1	$\searrow$	0	$\searrow$	-1	$\nearrow$	0	$\nearrow$	1

پ - تغییرات تانژانت - مانند دو حالت قبل اگر انتهای کمان AM روبرو به زاویه $\angle AOM$ درشکل ۱۵ با شروع نقطهٔ A درجهت مثبت حرکت کند وقتی‌که نقطهٔ M روی کمان AB از نقطه A به طرف B حرکت می کند نقطهٔ C روی محور تانژانتها به طرف بالا تغییر مکان می‌دهد اگر M خیلی نزدیك به نقطهٔ B شود اندازهٔ AC بسیار بزرگ شده به طوری که از هرعدد بزرگی بزرگتر خواهد شد وقتی‌که نقطهٔ M به نقطهٔ B منطبق شود دیگر نقطهٔ C وجود ندارد چون شعاع حامل انتهای کمان AM (یعنی OB) با AT موازی خواهد



(شکل ۱۵)

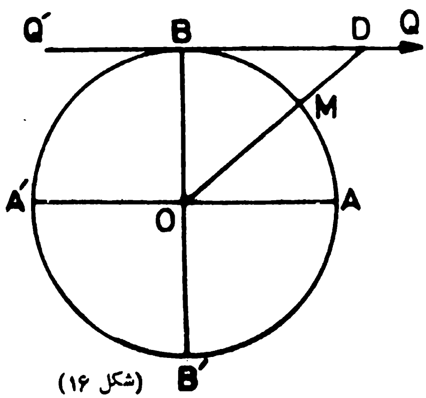
شد پس اگر اندازهٔ زاویهٔ AOM برابر $\frac{\pi}{۲}$ رادیان شود تانژانت آن تعریف نشده است.

اگر نقطهٔ M روی کمان BA' بوده و خیلی نزدیک به نقطهٔ B باشد نقطهٔ C در روی AT' قرار گرفته و طول AC خیلی بزرگ شده به طوری که از هر عدد بزرگی بزرگتر خواهد شد و چون در پایین محور تانژانتهاست علامت آن منفی می‌باشد. اگر نقطهٔ M بر نقطهٔ A' منطبق شود تانژانت آن برابر صفر می‌شود. سپس اگر M از A' به طرف B' حرکت کند تغییرات تانژانت برابر با تغییرات آن در حالت حرکت M از A به طرف B بوده و همچنین تغییرات تانژانت زاویهٔ $\angle AOM$ وقتی که M از B' به‌طرف A حرکت می کند برابر با تغییرات تانژانت آن درموقعی است که M از B به‌طرف A' حرکت می کند.

جدول تغییرات تانژانت وقتی که زاویه $\angle AOM$ از صفر تا ۲π تغییر می کند چنین است:

زاویه α	۰ ↗	$\frac{\pi}{۲}$	↗ π	$\frac{۳\pi}{۲}$	↗ ۲π
$tg\alpha$	۰ ↗	تعریف نشده	↗ ۰ ↗	تعریف نشده	↗ ۰

ت ــ تغییرات کتانژانت ــ اگر مانند تغییرات تانژانت، تغییرات کتانژانت را بررسی کنیم خواهیم دید که اگر نقطهٔ M انتهای کمان AM (شکل ۱۶) خیلی نزدیک به نقطهٔ A باشد، یعنی اندازهٔ کمان خیلی کوچک و نزدیک صفر باشد نقطهٔ D روی BQ قرار گرفته از نقطهٔ B بسیار دور می‌باشد که در اینصورت اندازهٔ آن از هر عدد بزرگی بزرگتر خواهد شد. وقتی اندازهٔ کمان AM برابر صفر باشد کتانژانت زاویه مرکزی روبرو به آن تعریف نشده است چون شعاع حامل انتهای کمان یعنی OM (یا OA) موازی BQ بوده و نقطه‌ای مانند D وجود نخواهد داشت



(شکل ۱۶)

وقتی AM بزرگ می‌شود یعنی نقطهٔ M (انتهای کمان) به‌طرف نقطه B حرکت می کند نقطهٔ D به نقطهٔ B نزدیک می‌شود و هرچه مقدار زاویه مرکزی به $\frac{\pi}{۲}$ نزدیک شود نقطهٔ D هم به نقطهٔ B نزدیک می‌شود بالاخره اگر اندازهٔ زاویه مرکزی برابر $\frac{\pi}{۲}$ شود کتانژانت آن برابر صفر می‌شود **وقتی که نقطهٔ M روی کمان BA' حرکت کند نقطهٔ D روی BQ' قرار گرفته هرچه نقطهٔ M به نقطهٔ**

A' نزدیک می‌شود نقطهٔ D از B دور می‌شود به‌طوری که وقتی نقطهٔ M خیلی به نقطهٔ A' نزدیک شود اندازهٔ BD از هر عدد بزرگی بزرگتر خواهد شد و اگر نقطهٔ M روی کمان $A'B'A$ از A' به‌طرف A حرکت کند تغییرات کتانژانت زاویه مرکزی روبرو به این کمان در این فاصله همان تغییرات کتانژانت در فاصلهٔ ABA' می باشد.

جدول تغییرات کتانژانت عبارت است از:

زاویه α	۰	$\nearrow$	$\frac{\pi}{۲}$	$\nearrow$	π	$\nearrow$	$۳\frac{\pi}{۲}$	$\nearrow$	۲π
$cotg\alpha$	تعریف نشده	$\searrow$	۰	$\searrow$	تعریف نشده	$\searrow$	۰	$\searrow$	تعریف نشده

جدول زیر تغییرات نسبتهای مثلثاتی یک کمان (زاویه) را وقتی از صفر تا ۲π تغییر کند نشان می‌دهد.

کمان / تابع مثلثاتی	۰	$\frac{\pi}{۲}$	π	$\frac{۳\pi}{۲}$	۲π
$\sin\alpha$	۰	۱	۰	۱−	۰
$\cos\alpha$	۱	۰	۱−	۰	۱
$tg\alpha$	۰	تعریف نشده	۰	تعریف نشده	۰
$cotg\alpha$	تعریف نشده	۰	تعریف نشده	۰	تعریف نشده

چنانکه دیده‌شد، سینوس و کسینوس یک زاویه همواره مقدارهایی محصور بین ۱ و ۱− ویا برابر با آنها می‌باشند و برعکس، هرعدد حقیقی a به قسمی که $-۱ \leqslant a \leqslant ۱$ را می‌توان سینوس و یا کسینوس یک زاویه فرض کرد.

تانژانت و کتانژانت یک زاویه می‌توانند برابر با هرعدد حقیقی باشند. یعنی اگر $tg\alpha = b$، پس $b \in R$ و برعکس، هرعدد حقیقی مانند b را می‌توان تانژانت و یا کتانژانت یک زاویه فرض نمود.

اگر زاویهٔ α (زاویه‌مرکزی روبه‌روی به کمان AM) برابر با $\frac{\pi}{2}$ یا $\frac{3\pi}{2}$ باشد، تانژانت α تعریف نشده است. همچنین اگر $\alpha = 0$ یا $\alpha = \pi$ یا $\alpha = 2\pi$، کتانژانت α تعریف نشده است.

چنانکه در بیان زاویه مثلثاتی دیده شد اگر α اندازهٔ یکی از زاویه‌های $\angle AOM$ برحسب رادیان باشد اندازهٔ همهٔ زاویه‌های مرکزی روبروبه کمانهایی که ابتدای آنها نقطهٔ A و انتهای آنها نقطهٔ M باشد به‌صورت $2k\pi+\alpha$ نوشته می‌شود که در آن $k\in Z$. بنا به تعریف نسبتهای مثلثاتی زاویه $\angle AOM$ را می‌توان به‌صورت زیر نوشت (شکل ۱۷):

$$\sin\alpha = \sin(2k\pi+\alpha) = \overline{OH'}$$

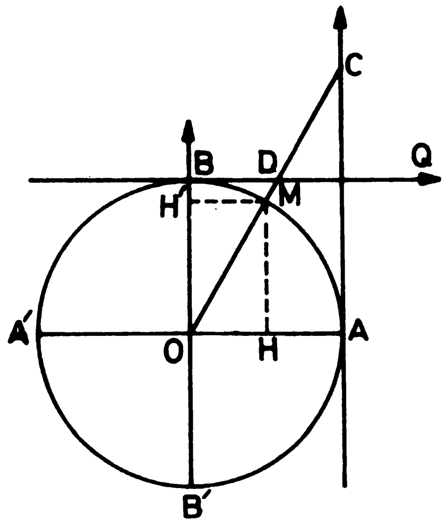
$$\cos\alpha = \cos(2k\pi+\alpha) = \overline{OH}$$

$$tg\alpha = tg(2k\pi+\alpha) = \overline{AC}$$

$$cotg\alpha = cotg(2k\pi+\alpha) = \overline{BD}$$

و یا به طور خلاصه

$$(1)\quad \begin{cases} \sin(2k\pi+\alpha) = \sin\alpha \\ \cos(2k\pi+\alpha) = \cos\alpha \\ tg(2k\pi+\alpha) = tg\alpha \\ cotg(2k\pi+\alpha) = cotg\alpha \end{cases}$$



(شکل ۱۷)

تمرین

۱ــ آیا زاویه‌ای وجود دارد، که سینوس آن مثبت و کسینوسش منفی باشد؟

۲ــ آیا زاویه‌ای وجود دارد که کسینوسش مثبت وسینوس آن منفی باشد؟

۳ــ آیا زاویه‌ای وجود دارد که تانژانت آن مثبت و کتانژانتش منفی باشد؟

۴ــ اگر $\sin\alpha\cdot\cos\alpha > 0$ باشد انتهای کمان روبروبه زاویه α در کدام قسمت از دایرهٔ مثلثاتی می‌تواند باشد؟

۵ــ اگر tgx و $\sin x$ هم‌علامت باشند انتهای کمان روبروبه زاویه x در کدام قسمت دایرهٔ مثلثاتی می‌تواند باشد؟

۶ــ اگر انتهای کمان روبروبه زاویه x درناحیهٔ دوم دایرهٔ مثلثاتی تغییر کند، $\sin x$ درجه

فاصله‌ای تغییر می‌کند؟

۷ـ اگر انتهای کمان روبرو به‌زاویه α در ناحیهٔ سوم دایرهٔ مثلثاتی تغییر کند $tg\alpha$ درچه فاصله‌ای تغییر می‌کند؟

۸ـ اگر انتهای کمان روبروبه زاویه a درناحیهٔ چهارم دایرهٔ مثلثاتی تغییر کند آیا $sin a - cos a$ همواره مقداری است منفی؟

۹ـ اگر $0 \leqslant x \leqslant 180^\circ$ باشد آیا $0 \leqslant sin x \leqslant 1$ است؟

۱۰ـ اگر $-90^\circ \leqslant \alpha \leqslant 90^\circ$ باشد آیا $0 \leqslant cos\alpha \leqslant 1$ است؟

۱۱ـ اگر $cos^2\alpha = \frac{2}{5}$ انتهای کمان روبروی زاویهٔ α در کدام قسمت دایرهٔ مثلثاتی قرار دارد؟

۱۲ـ اگر $tg^2x = \frac{2}{3}$ انتهای کمان روبروبه زاویه x درکدام قسمت دایرهٔ مثلثاتی قراردارد؟

۱۳ـ اگر $\pi < \varphi < \frac{3\pi}{2}$ وفرض کنیم $cos\varphi = \frac{2m-1}{m+1}$ حدود m چیست؟

۱۴ـ بیشترین و کمترین مقدار عبارتهای زیر را برحسب مقادیر مختلف زاویه x تعیین کنید:

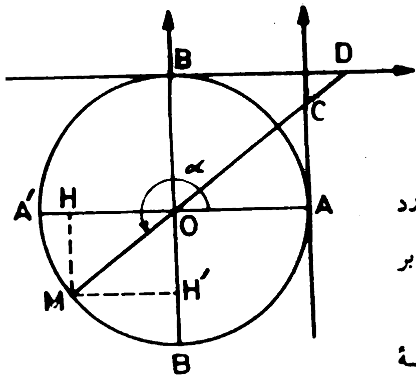
الف: $2 + 3 sin x$ ب: $1 - 2 cos x$

فصل سوم

روابط بین نسبتهای مثلثاتی

(۳-۱)- رابطه‌های اصلی بین نسبتهای مثلثاتی یك زاویه

فرض‌می کنیم انتهای کمان AM روبروبه زاویه α درناحیهٔ سوم قرار دارد شکل (۱۸).



(شکل ۱۸)

۱- در مثلث قائم‌الزاویهٔ OHM داریم:

$$\overline{HM}^2+\overline{OH}^2=\overline{OM}^2$$

$$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1 \qquad \text{(I)}$$ ویا

واضح است‌که رابطهٔ (I) بستگی به‌اندازهٔ $\angle\alpha$ ندارد یعنی مجموع مربعات سینوس وکسینوس هرکمان برابر با یك است.

۲- با توجه به تشابه دو مثلث قائم‌الزاویهٔ OHM و OAC داریم:

(II) $\quad \frac{\overline{AC}}{\overline{OA}}=\frac{\overline{HM}}{\overline{OH}}$ و یا $tg\alpha=\frac{tg\alpha}{1}=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ یعنی اگر انتهای کمان AM نقطهٔ B یا نقطهٔ B' نباشد $(\alpha\neq(2k+1)\frac{\pi}{2}\ ,\ k\in Z)$ اندازهٔ تانژانت هرکمان برابر با خارج‌قسمت سینوس بر کسینوس‌آن زاویه است.

۳- از تشابه دو مثلث قائم‌الزاویهٔ $OH'M$ و OBD خواهیم داشت:

(III) $\quad \frac{\overline{BD}}{\overline{OB}}=\frac{\overline{H'M}}{\overline{OH'}}$ و یا $cotg\alpha=\frac{cotg\alpha}{1}=\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$ یعنی اگر انتهای کمان AM نقطهٔ A یا نقطهٔ A' نباشد $(\alpha\neq k\pi\ ,\ k\in Z)$ اندازه کتانژانت کمان برابر با خارج قسمت کسینوس‌به سینوس‌آن زاویه است.

رابطه‌های I و II و III رابطه‌های اصلی نامیده می‌شوند.

تبصره - از مقایسهٔ روابط (II) و (III) نتیجه می‌شود: $tg\alpha=\frac{1}{cotg\alpha}$ یا $tg\alpha\cdot cotg\alpha=1$ و همچنین از رابطهٔ (I) می‌توان نتیجه گرفت $\sin\alpha=\pm\sqrt{1-\cos^2\alpha}$ و

$\cos\alpha = \pm\sqrt{1-\sin^2\alpha}$.

مثال ۱ - سینوس و کسینوس زاویه‌ای مانند α را برحسب تانژانت و کتانژانت آن زاویه حساب کنید.

حل - درصورتیکه $\sin\alpha = 0$، برطبق قسمت الف از (۲-۵) زاویه α می‌تواند برابر با ۰، π یا 2π باشد. درنتیجه بسهولت میتوان با توجه به جدول مقادیر نسبتهای مثلثاتی که درآخر فصل مذکور داده شده است، سایر نسبتهای مثلثاتی زاویه α را بدست آورد.

با فرض آنکه $\sin\alpha \neq 0$، دوطرف رابطه $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ را بر $\sin^2\alpha$ تقسیم می‌کنیم، بنابراین خواهیم داشت:

$$1 + \frac{\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha} = \frac{1}{\sin^2\alpha} \quad \text{و یا} \quad 1 + \cot g^2\alpha = \frac{1}{\sin^2\alpha}$$

$$\sin^2\alpha = \frac{1}{1+\cot g^2\alpha} \Longrightarrow \sin\alpha = \frac{1}{\pm\sqrt{1+\cot g^2\alpha}}$$

و نیز

$$1 + \frac{1}{tg^2\alpha} = \frac{1}{\sin^2\alpha} \Longrightarrow \frac{1+tg^2\alpha}{tg^2\alpha} = \frac{1}{\sin^2\alpha} \Longrightarrow$$

$$\sin\alpha = \frac{tg\alpha}{\pm\sqrt{1+tg^2\alpha}}$$

با فرض آنکه $\cos x \neq 0$، اگر دوطرف رابطهٔ $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ را بر $\cos^2 x$ تقسیم کنیم خواهیم داشت:

$$\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} + 1 = \frac{1}{\cos^2 x}\ ,\quad tg^2 x + 1 = \frac{1}{\cos^2 x}\ ,\quad \cos^2 x = \frac{1}{1+tg^2 x}$$

و

$$\frac{1}{\cot g^2 x} + 1 = \frac{1}{\cos^2 x}\ ,\quad \frac{1+\cot g^2 x}{\cot g^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}$$

از رابطه‌های بالا می‌توان نتیجه گرفت:

$$\cos x = \frac{\cot g x}{\pm\sqrt{1+\cot g^2 x}}\ ,\quad \cos x = \frac{1}{\pm\sqrt{1+tg^2 x}}$$

می‌توان تانژانت و کتانژانت یك زاویه را برحسب سینوس و یا کسینوس آن زاویه نوشت:

$$tgx=\frac{\sin x}{\cos x}=\frac{\sin x}{\pm\sqrt{1-\sin^2 x}} \quad و \quad tgx=\frac{\sin x}{\cos x}=\frac{\pm\sqrt{1-\cos^2 x}}{\cos x}$$

$$cotgx=\frac{\cos x}{\sin x}=\frac{\pm\sqrt{1-\sin^2 x}}{\sin x} \quad و \quad cotgx=\frac{\cos x}{\sin x}=\frac{\cos x}{\pm\sqrt{1-\cos^2 x}}$$

تبصره[۱] ــ عکس کسینوس یك زاویه را سکانت($Sécante$) وعکس سینوس یك زاویه را کُسکانت ($Cosecante$) آن کمان نامیده و می‌نویسیم: $\sec\alpha=\frac{1}{\cos\alpha}$ و $\operatorname{cosec}\alpha=\frac{1}{\sin\alpha}$

مثال ۲ - اگر $\cos x=\frac{2}{3}$ وانتهای کمان روبروبه زاویه x درناحیهٔ چهارم دایرهٔ مثلثاتی باشد سایرنسبتهای مثلثاتی x را حساب کنید.

حل ـ چون انتهای کمان روبروبه زاویه x در ربع چهارم است کسینوس آن مثبت وسایر نسبتهای مثلثاتی آن منفی است.

و با توجه به رابطهٔ $\sin x=\pm\sqrt{1-\cos^2 x}$ خواهیم داشت:

$$\sin x=-\sqrt{1-\frac{4}{9}}=-\frac{\sqrt{5}}{3}$$

و همچنین از رابطهٔ $tgx=\frac{\sin x}{\cos x}$ نتیجه می‌شود:

$$tgx=-\frac{\sqrt{5}}{3}:\frac{2}{3}=-\frac{\sqrt{5}}{2}$$

و از رابطهٔ $cotgx=\frac{1}{tgx}$ نتیجه می‌شود :

$$cotgx=-\frac{2}{\sqrt{5}}=-\frac{2\sqrt{5}}{5}$$

۱ــ برخی از ریاضیدانان اسلامی درگذشته سینوس را جیب وکسینوس را جیب‌تمام وتانژانت را ظل وکتانژانت را ظل تمام می‌گفته‌اند.

ابوالوفای بوزجانی ریاضی‌دان ایرانی (۹۴۰ــ۹۹۸ میلادی) واضع سکانت وکسکانت است او سکانت را قطر ظل وکسکانت را قطرظل تمام نامید.

مثال ۳ - اگر $sin x = -\frac{۸}{۱۷}$ وانتهای کمان روبروبه‌زاویه x درناحیهٔ سوم باشدمطلوب است محاسبهٔ سایرنسبتهای مثلثاتی x.

حل - چون انتهای کمان روبرو به زاویه x درناحیهٔ سوم است سینوس وکسینوس آن منفی، تانژانت وکتانژانت آن مثبت می‌باشد.

از رابطهٔ $cos x = \pm\sqrt{۱ - sin^۲ x}$ نتیجه می‌شود:

$$cos x = -\sqrt{۱ - \frac{۶۴}{۲۸۹}} = -\frac{۱۵}{۱۷}$$

از رابطهٔ $tg x = \frac{sin x}{cos x}$ و $cotg x = \frac{cos x}{sin x}$ می‌توان نوشت:

$$tg x = \frac{۸}{۱۵} \quad و \quad cotg x = \frac{۱۵}{۸}$$

مثال ۴ - اگر $tg z = -۲$ وانتهای کمان روبروبه زاویه z در ربع‌دوم قرارداشته‌باشد سایرنسبتهای مثلثاتی z را حساب کنید.

حل - چون انتهای کمان روبروبه زاویه z در ربع دوم دایرهٔ مثلثاتی قراردارد سینوس z مثبت وسایر نسبتهای مثلثاتی منفی است.

از رابطه‌هـای $sin z = \frac{tg z}{\pm\sqrt{۱ + tg^۲ z}}$ و $cos z = \frac{۱}{\pm\sqrt{۱ + tg^۲ z}}$ مـی‌تـوان نتیجه گرفت:

$$sin z = \frac{-۲}{-\sqrt{۱+۴}} = \frac{۲}{\sqrt{۵}} = \frac{۲\sqrt{۵}}{۵} \quad و \quad cos z = \frac{۱}{-\sqrt{۱+۴}} = -\frac{۱}{\sqrt{۵}} = -\frac{\sqrt{۵}}{۵}$$

$$cotg z = \frac{۱}{tg z} = -\frac{۱}{۲}$$

(۲-۳)ـ ساده کردن عبارتهای مثلثاتی

برای روشن شدن این‌مطلب به ذکرچند مثال می‌پردازیم:

مثال ۱ ـ عبارت $sin^۲\alpha cos^۲\alpha(۲ + tg^۲\alpha + cotg^۲\alpha)$ را ساده کنید.

حل ـ داخل پرانتز را می‌توان چنین نوشت :

$$۲ + tg^۲\alpha + cotg^۲\alpha = ۱ + tg^۲\alpha + ۱ + cotg^۲\alpha = \frac{۱}{cos^۲\alpha} + \frac{۱}{sin^۲\alpha} =$$

$$\frac{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha\cos^2\alpha}=\frac{1}{\sin^2\alpha\cos^2\alpha}$$

بنابراین
$$\sin^2\alpha\cos^2\alpha\left(\frac{1}{\sin^2\alpha\cos^2\alpha}\right)=1$$

مثال ۲ ـ عبارت $S=\frac{\sin x}{1+\cos x}+\frac{1+\cos x}{\sin x}$ را ساده کنید با فرض $1+\cos x\neq 0$ و $\sin x\neq 0$

حل ـ
$$S=\frac{\sin^2 x+(1+\cos x)^2}{(1+\cos x)\sin x}=\frac{\sin^2 x+1+\cos^2 x+2\cos x}{(1+\cos x)\sin x}=$$

$$\frac{2+2\cos x}{(1+\cos x)\sin x}=\frac{2(1+\cos x)}{(1+\cos x)\sin x}=\frac{2}{\sin x}$$

تمرین

عبارتهای زیر را ساده کنید:

۱ـ $\sin x\cdot\cos x\cdot tg x\cdot cotg x$

۲ـ $\sin^3 a\cdot cotg^3 a\cdot tg^2 a\cdot\cos^2 a$

۳ـ $\frac{(1+tg\alpha)(1-cotg\alpha)}{(1+cotg\alpha)(1-tg\alpha)}$

۴ـ $\cos b\left(\frac{2}{\cos b}+tg b\right)\left(\frac{1}{\cos b}-2tg b\right)+3tg b$

۵ـ $\frac{(1+\sin\alpha\cos\alpha)(1-\sin\alpha\cos\alpha)-\sin^2\alpha\cos^2\alpha}{\cos^4\alpha+\sin^4\alpha}$

(۳-۳)ـ اتحاد مثلثاتی

چنانکه آموخته‌اید هرگاه یك تساوی در ازای جمیع مقدارهایی که به‌جای متغیرهای آن گذاشته می‌شود برقرار باشد اتحاد نامیده می‌شود (منظور مقدارهائی از متغیرهاست که به‌ازای آنها طرفین تساوی تعریف شده است).

مثلاً تساوی $(2x+3y)^2\equiv 4x^2+12xy+9y^2$ یك اتحاد جبری است که در ازای هرمقدار دلخواه برای x و y همواره درست می‌باشد.

هرگاه در یك اتحاد جبری جمله‌ها برحسب نسبتهای مثلثاتی یك و یا چند زاویه باشند آن را اتحاد مثلثاتی می‌نامند مانند اتحاد:

$$tg\alpha + cotg\alpha \equiv \frac{1}{\sin\alpha\cos\alpha},$$

$$tg^2 x + \frac{1}{\cos^2 y} \equiv tg^2 y + \frac{1}{\cos^2 x}$$

برای ثابت کردن ویا بررسی درستی یک اتحاد مثلثاتی باید به‌کمک رابطه‌های مثلثاتی (رابطه‌های اصلی و رابطه‌های نتیجه شده از آنها)، یک طرف تساوی اتحاد را آن قدر تغییر داد تا طرف دیگر اتحاد از آن نتیجه شود.

در بعضی از اتحادها ممکن است هر دوطرف تساوی اتحاد را تغییر داد و با انجام عملهای لازم هر دوطرف را به‌عبارتهای جدیدی تبدیل کرد که با هم برابر باشند (عبارتهای هر دوطرف یکی باشند). گاه از رابطه‌های اصلی نیز می‌توان برای ثابت‌کردن ویا بررسی درستی رابطه‌های مثلثاتی استفاده کرد.

مثال ۱ - آیا رابطه $tg\alpha + cotg\alpha \equiv \frac{1}{\sin\alpha\cos\alpha}$ که در آن $\sin\alpha\cos\alpha \neq 0$ یک اتحاد است؟

$$\text{طرف اول} = tg\alpha + cotg\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} + \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{\sin^2\alpha + \cos^2\alpha}{\sin\alpha\cos\alpha} = \frac{1}{\sin\alpha\cos\alpha}$$

مثال ۲ - درستی رابطه $tg^2 x + \frac{1}{\cos^2 y} \equiv tg^2 y + \frac{1}{\cos^2 x}$ را تحقیق کنید با شرط آنکه $\cos x \cos y \neq 0$.

$$\text{طرف اول} = tg^2 x + \frac{1}{\cos^2 y} = \frac{1}{\cos^2 x} - 1 + 1 + tg^2 y = \frac{1}{\cos^2 x} + tg^2 y$$

مثال ۳ - درستی رابطه $tga \cdot tgb \equiv \frac{tga + tgb}{cotga + cotgb}$ را تحقیق کنید. با شرط آنکه $cotga + cotgb \neq 0$.

برای بررسی درستی این اتحاد کافی است نشان دهیم که رابطه زیر درست است.

$$tga + tgb \equiv (cotga + cotgb)\, tga tgb$$

اما با توجه با تحاد $tga cotga = 1$ می‌توان نوشت:

$$(cotga + cotgb) tga tgb \equiv cotga tga tgb + cotgb tgb tga \equiv tgb + tga$$

مثال ۴ - درصورتی که انتهای کمان روبرو به زاویه x درناحیهٔ اول دایرهٔ مثلثاتی باشد درستی رابطه زیر را تحقیق کنید:

$$\sqrt{\frac{1 + \sin x}{1 - \sin x}} - \sqrt{\frac{1 - \sin x}{1 + \sin x}} \equiv 2\, tg x$$

حل ـ

$$\text{طرف اول} = \sqrt{\frac{1+\sin x}{1-\sin x}} - \sqrt{\frac{1-\sin x}{1+\sin x}} = \sqrt{\frac{(1+\sin x)^2}{1-\sin^2 x}} - \sqrt{\frac{(1-\sin x)^2}{1-\sin^2 x}} =$$

$$\sqrt{\frac{(1+\sin x)^2}{\cos^2 x}} - \sqrt{\frac{(1-\sin x)^2}{\cos^2 x}}$$

با توجه به آن‌که $1+\sin x$ و $1-\sin x$ و $\cos x$ هرسه مقدارهای مثبتی می‌باشند داریم:

$$\text{طرف اول} = \frac{1+\sin x}{\cos x} - \frac{1-\sin x}{\cos x} = \frac{1+\sin x-1+\sin x}{\cos x} = \frac{2\sin x}{\cos x} = 2\,tg x$$

تمرینات

۱ــ درستی رابطه‌های زیر را تحقیق کنید:

الف ــ $\cos\alpha = \sin\alpha \cot g\alpha$

ب ــ $\cos\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{tg\alpha}$ $\qquad tg\alpha \neq 0$

پ ــ $(\sin a + \cos a)^2 = 1 + 2\sin a\cos a$

ت ــ $\cos^2 a - \cos^2 b = \sin^2 b - \sin^2 a$

ث ــ $\sin\alpha\, tg\alpha = \dfrac{1}{\cos\alpha} - \cos\alpha$ $\qquad \cos\alpha \neq 0$

ج ــ $(tg\alpha - 1)(\cot g\alpha + 1) = tg\alpha - \cot g\alpha$

چ ــ $\cos^2\alpha(2 + tg^2\alpha) = 2 - \sin^2\alpha$

۲ــ مطلوب است محاسبهٔ سایر نسبتهای مثلثاتی زاویه‌های زیر که یکی از نسبتهای مثلثاتی آنها داده شده است:

الف ــ $\sin x = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ وانتهای کمان روبروبه زاویه x درناحیهٔ چهارم واقع است.

ب ــ $\cos y = \dfrac{1}{2/4}$ و انتهای کمان روبروبه زاویه y درناحیهٔ اول واقع است.

پ ــ $tg z = -2/4$ وانتهای کمان روبروبه زاویه z درناحیهٔ دوم واقع است.

ت ــ $\cot g D = \sqrt{3}$ وانتهای کمان روبروبه زاویه D درناحیهٔ سوم واقع است.

۳ــ مقدار $a \in R$ را چنان تعیین کنید که $\sin x = 3 - 2a$ یک گزاره درست باشد.

۴ـ ثابت کنید به ازای جمیع مقادیر $b\in R$ گزارهٔ $\cos x=\frac{۲b}{۱+b^{۲}}$ درست است.

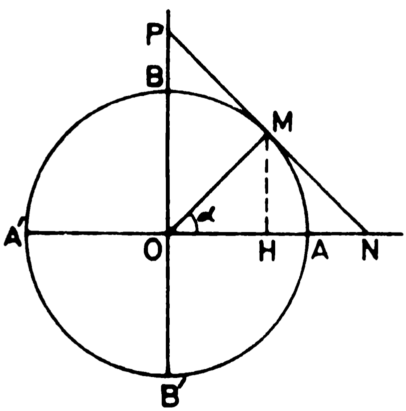
۵ـ درچه ناحیه مثلثاتی انتهای کمان روبروبه زاویه x واقع باشد تا رابطه زیر یك اتحاد مثلثاتی شود.

$$tgx+\sqrt{\frac{۱-\sin x}{۱+\sin x}}=\frac{۱}{\cos x}$$

۶ـ از رابطهٔ $\cos x=\sqrt{\frac{cotg x}{a+cotg x}}$ مقدار tgx را برحسب a به دست آورید که‌در آن $x\neq k\pi$ ، $k\in Z$ و $a\neq -cotg x$.

۷ـ اگر $tg\varphi=\frac{m+۱}{m}$ و $\cos\varphi=\frac{m}{m+۲}$ باشد مقدار m را حساب کنیدو انتهای کمان روبروبه زاویه φ را در دایرهٔ مثلثاتی معین کنید.

۸ـ اگر $tgz=\frac{a-۱}{b}$ و $cotgz=\frac{۳}{a-۲}$ باشد، چه رابطه‌ای بین a و b برقرار است؟



(شکل ۱۹)

۹ـ در دایرهٔ مثلثاتی (شکل۱۹) پاره خطهایی را که اندازهٔ جبری آنها $tg\alpha$ و $cotg\alpha$ و $\frac{۱}{\sin\alpha}$ و $\frac{۱}{\cos\alpha}$ می‌باشند مشخص نموده و ثابت کنید که $\sin\alpha<tg\alpha$ و $\cos\alpha<cotg\alpha$.

(دقت کنید که ازمسئلهٔ ۹ تعریف دیگری برای نسبتهای مثلثاتی زاویه α بدست می‌آید.)

۱۰ـ در صورتی که $\alpha\neq\frac{k\pi}{۲}$ و $k\in Z$ و $\alpha\in R$ ثابت کنید که:

$$\frac{tg\alpha+\sin\alpha}{\cos\alpha+cotg\alpha}>۰$$

۱۱ـ تحقیق کنید عبارتهای زیر بستگی به x ندارد.

الف ـ $\frac{\sin^{۴}x+\cos^{۴}x-۱}{\sin^{۶}x+\cos^{۶}x-۱}$

ب ـ $\sin^{۸}x+\cos^{۸}x+۲\sin^{۲}x\cos^{۲}x(۲-\sin^{۲}x\cos^{۲}x)$

۱۲ـ درستی گزاره‌های زیر را تحقیق کنید.

الف ـ $\dfrac{\cos x}{1+\sin x}+\dfrac{1+\sin x}{\cos x}=\dfrac{2}{\cos x}$

ب ـ $\cos^2 x=\cot g^2 x-\cot g^2 x\cos^2 x$

پ ـ $1-\cot g^4 x=\dfrac{2}{\sin^2 x}-\dfrac{1}{\sin^4 x}$

ت ـ $\sin^2 y-\sin^2 x=\dfrac{1}{1+tg^2 x}-\dfrac{1}{1+tg^2 y}$

ث ـ $2(\sin^6 x+\cos^6 x)-3(\sin^4 x+\cos^4 x)=-1$

ج ـ $\dfrac{1}{\cos^6 x}-\dfrac{3tg^2 x}{\cos^2 x}=1+tg^6 x$

۱۳ـ گزاره‌های شرطی زیر را ثابت کنید:

الف ـ با شرط $a\sin^2 x-b\cos^2 x=a-b$ $\quad x\in R$

ثابت کنید: $b\sin^4 x+a\cos^4 x=\dfrac{ab}{a+b}$

ب ـ با شرط $0<x<\dfrac{\pi}{2}$ ثابت کنید: $0<\sin^6 x+\cos^6 x<1$

۱۴ ـ در رابطه‌های زیر x را حذف کنید. (رابطه‌ای مستقل از x بدست‌آورید).

الف ـ $\begin{cases}\sin x+\cos x=a\\ \sin^3 x+\cos^3 x=b\end{cases}$

ب ـ $\begin{cases}\sin^3 x=a\\ \cos^3 x=b\end{cases}$

پ ـ $\begin{cases}tg x+\cot g x=a^3\\ \dfrac{1}{\sin x}-\sin x=b^3\end{cases}$

ت ـ $\begin{cases}\sin x-\dfrac{1}{\sin x}=a^3\\ \cos x-\dfrac{1}{\cos x}=b^3\end{cases}$

۱۵ـ اگر A و B و C زوایای مثلثی باشند از تساوی

$\cos(A-B)\cos(B-C)\cos(C-A)=1$

نتیجه بگیرید که مثلث ABC متساوی‌الاضلاع است.

۱۶ ـ ریشه‌های معادله زیررا به‌دست آورده، آنها را به ساده‌ترین صورت‌برحسب نسبتهای مثلثاتی α بنویسید.

$$x^{۲} - (tg\alpha + ۳cotg\alpha)x + ۳ = ۰$$

۱۷ـ در صورتی که α زاویهٔ معلوم فرض شود، x و y را از دستگاه دو مجهولی زیر برحسب نسبتهای مثلثاتی α به دست آورید:

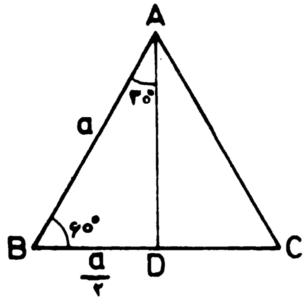
$$\begin{cases} x\cos\alpha + y\sin\alpha = ۱ \\ y\cos\alpha - x\sin\alpha = ۰ \end{cases}$$

فصل چهارم

محاسبهٔ نسبتهای مثلثاتی بعضی از زاویه‌ها و رابطهٔ بین آنها

(۴-۱)- محاسبهٔ نسبتهای مثلثاتی زاویه‌های °۳۰ و °۶۰

در مثلث متساوی‌الاضلاع ABC نیمساز $\angle A$ را رسم می‌کنیم (شکل ۲۰) هر یک از زاویه‌های BAD و DAC برابر °۳۰ است در مثلث ADB ضلع مقابل به زاویهٔ °۳۰ نصف وتر است و می‌توان نوشت:



(شکل ۲۰)

$$\sin(\angle BAD) = \sin 30^\circ = \frac{BD}{BA} = \frac{\frac{a}{2}}{a} = \frac{1}{2}$$

و از آنجا

$$\cos 30^\circ = \sqrt{1 - \sin^2 30^\circ} = \sqrt{1 - \frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

و

$$tg 30^\circ = \frac{\sin 30^\circ}{\cos 30^\circ} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$cotg 30^\circ = \frac{\cos 30^\circ}{\sin 30^\circ} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} = \sqrt{3}$$

همچنین می‌توان نوشت:

$$\cos(\angle ABD) = \cos 60^\circ = \frac{BD}{BA} = \frac{\frac{a}{2}}{a} = \frac{1}{2}$$

$$\sin 60^\circ = \sqrt{1 - \cos^2 60^\circ} = \sqrt{1 - \frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$tg 60^\circ = \frac{\sin 60^\circ}{\cos 60^\circ} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} = \sqrt{3}$$

$$cotg۶۰^\circ = \frac{cos۶۰^\circ}{sin۶۰^\circ} = \frac{\frac{۱}{۲}}{\frac{\sqrt{۳}}{۲}} = \frac{۱}{\sqrt{۳}} = \frac{\sqrt{۳}}{۳}$$

بنابراین می‌توان نوشت :

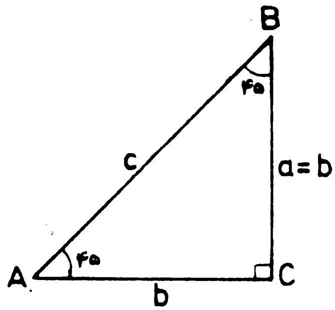
$$sin۳۰^\circ = cos۶۰^\circ = \frac{۱}{۲}$$

$$cos۳۰^\circ = sin۶۰^\circ = \frac{\sqrt{۳}}{۲}$$

$$tg۳۰^\circ = cotg۶۰^\circ = \frac{\sqrt{۳}}{۳}$$

$$cotg۳۰^\circ = tg۶۰^\circ = \sqrt{۳}$$

(۴ـ۲)ـ نسبتهای مثلثاتی زاویهٔ °۴۵



(شکل ۲۱)

در مثلث قائم‌الـزاویـهٔ ABC، $\angle C = ۹۰^\circ$ و $\angle A = ۴۵^\circ$. (شکل ۲۱) دراین مثلث خواهیم داشت: $\angle B = ۴۵^\circ$ و لذا:

$a = b$ و $۲a^۲ = c^۲ \Longrightarrow c = a\sqrt{۲}$

$$sin\angle A = sin۴۵^\circ = \frac{CB}{AB} = \frac{a}{c} = \frac{a}{a\sqrt{۲}} = \frac{۱}{\sqrt{۲}} = \frac{\sqrt{۲}}{۲}$$

$$cos\angle A = cos۴۵^\circ = \frac{AC}{AB} = \frac{b}{c} = \frac{a}{a\sqrt{۲}} = \frac{۱}{\sqrt{۲}} = \frac{\sqrt{۲}}{۲}$$

$$tg\angle A = tg۴۵^\circ = \frac{CB}{AC} = \frac{a}{b} = \frac{a}{a} = ۱$$

$$cotg\angle A = cotg۴۵^\circ = \frac{AC}{CB} = \frac{b}{a} = \frac{a}{a} = ۱$$

بنابراین نتیجه می گیریم:

$$sin۴۵^\circ = cos۴۵^\circ = \frac{\sqrt{۲}}{۲}$$

$$tg۴۵^\circ = cotg۴۵^\circ = ۱$$

تذکر - می‌توان محاسبهٔ نسبتهای مثلثاتی زاویهٔ ۴۵° را با استفاده از $tg۴۵^\circ = ۱$ آغاز کرد.

(۴-۳)- خلاصه

جدول زیرمقادیر نسبتهای مثلثاتی زاویه‌های ۳۰° و ۴۵° و ۶۰° را نشان می‌دهد:

x	۳۰°	۴۵°	۶۰°
$\sin x$	$\frac{۱}{۲}$	$\frac{\sqrt{۲}}{۲}$	$\frac{\sqrt{۳}}{۲}$
$\cos x$	$\frac{\sqrt{۳}}{۲}$	$\frac{\sqrt{۲}}{۲}$	$\frac{۱}{۲}$
$tg x$	$\frac{\sqrt{۳}}{۳}$	۱	$\sqrt{۳}$
$cotg x$	$\sqrt{۳}$	۱	$\frac{\sqrt{۳}}{۳}$

تمرین

۱- کدام زاویهٔ حاده است که سینوس آن با کسینوسش برابر است؟

۲- کدام زاویهٔ حاده است که کسینوس آن $\sqrt{۳}$ برابر سینوسش می‌باشد؟

۳- آیا رابطهٔ $\sin ۶۰^\circ = ۲\sin ۳۰^\circ$ درست است؟

۴- آیا رابطهٔ $cotg ۳۰^\circ = ۲ cotg ۶۰^\circ$ درست است؟

۵- آیا نامساوی $\sin ۳۰^\circ < \sin ۴۵^\circ < \sin ۶۰^\circ$ درست است؟

۶- آیا نامساوی $\cos ۴۵^\circ > \cos ۶۰^\circ$ درست است؟

۷- درستی رابطه‌های زیر را بررسی کنید.

(الف) $۲\sin ۳۰ \cos ۳۰^\circ = \sin ۶۰^\circ$ (ب) $۲\sin ۶۰^\circ \cos ۶۰^\circ = \sin ۶۰^\circ$

(پ) $\sin ۴۵^\circ \cos ۴۵^\circ = \sin ۳۰^\circ$ (ت) $۳\sin ۳۰^\circ - ۴\sin^۳ ۳۰^\circ = ۱$

(ث) $۳\cos ۳۰^\circ - ۴\cos^۳ ۳۰ = ۰$

(ج) $\cos ۶۰^\circ \cos ۳۰^\circ + \sin ۶۰^\circ \sin ۳۰^\circ = \cos ۳۰^\circ$

$$\sin 60^\circ \cos 30^\circ - \cos 60^\circ \sin 30^\circ = \sin 30^\circ \qquad (ج)$$

$$tg\, 60^\circ = \frac{2\,tg\, 30^\circ}{1 - tg^2 30} \qquad (ح)$$

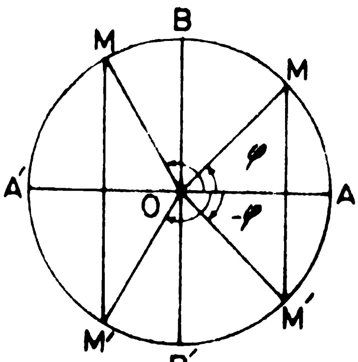
$$\cos 60^\circ = \frac{1 - tg^2 30^\circ}{1 + tg^2 30^\circ} \qquad (خ)$$

$$\frac{\sin^2 45^\circ}{2} = \frac{\sin^2 60^\circ}{3} = \sin^2 30^\circ \qquad (د)$$

۸ـ تحقیق کنید که رابطهٔ $(a+b)^2\sin^2 30^\circ - (a-b)^2\cos^2 60^\circ = ab$ همواره یک اتحاد است.

۹ـ اگر $30^\circ \leqslant \angle\alpha \leqslant 60^\circ$ و $\sin\alpha = 1 - 3m$، تعیین کنید که m درچه فاصله‌ای تغییر می‌کند؟

(۴-۴)ـ زوایای قرینه



(شکل ۲۲)

دو زاویه را قرینه گویند هرگاه اندازهٔ جبری آنها دوعدد قرینه باشند مانند زاویه‌های $\frac{\pi}{5}$ و $\frac{-\pi}{5}$ ویابه‌طور کلی φ و $-\varphi$. با توجه به‌شکل(۲۲) اگر انتهای کمان روبرو به یک‌زاویهٔ φ درناحیهٔ اول باشد انتهای کمان‌روبرو به زاویه قرینهٔ آن یعنی $-\varphi$ در ناحیهٔ چهارم است و اگر انتهای کمان روبرو به یک زاویه φ در ناحیهٔ دوم قرارگیرد انتهای کمان روبرو به زاویه $-\varphi$ در ناحیهٔ سوم می‌باشد در هرصورت انتهای دوکمان روبرو به دو زاویهٔ قرینه نسبت به محور کسینوسها قرینهٔ یکدیگرند.

به‌آسانی از روی شکل(۲۲) می‌توان نتیجه گرفت که کسینوسهای دو زاویه قرینه (یا به طور کلی دو زاویه φ و $-\varphi + 2k\pi$) با یکدیگر برابر ولی سینوسهای آنها قرینه‌اند، درنتیجه تانژانتها و کتانژانتهای این دو زاویه نیز با هم قرینه خواهند بود[1]. یعنی:

$$\sin(-\varphi) = -\sin\varphi$$
$$\cos(-\varphi) = \cos\varphi \qquad (1)$$

۱ـ ازاین ببعد درتمام مطالب این فصل دوکمان روبروبه دو زاویه مورد بحث دارای مبدأ مشترک می‌باشند.

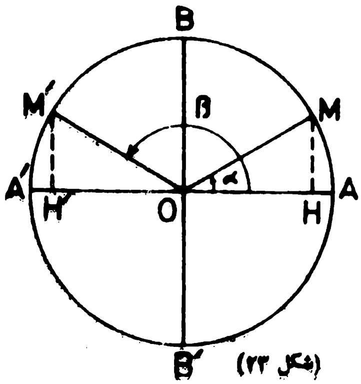
$$tg(-\varphi) = -tg\varphi$$
$$cotg(-\varphi) = -cotg\varphi$$

مثال :

$$sin(-\frac{\pi}{6}) = -sin\frac{\pi}{6} = -\frac{1}{2}$$
$$cos(-\frac{\pi}{6}) = cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$
$$tg(-\frac{\pi}{6}) = -tg\frac{\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$
$$cotg(-\frac{\pi}{6}) = -cotg\frac{\pi}{6} = -\sqrt{3}$$

(۴-۵)- زاویه‌های مکمل

دو زاویه وقتی مکملندکه مجموع آنها برابر π رادیان باشد مانندکمانهای $\frac{\pi}{5}$ و $\frac{4\pi}{5}$ یا (200° و -20°) یعنی اگر اندازهٔ جبری یك زاویه برابر با α باشد اندازهٔ جبری زاویه دیگر برابربا $\pi - \alpha$ خواهد بود. با توجه به شکل (۲۳) می‌توان به‌آسانی نتیجه‌گرفت‌که انتهای این دوکمان روبرو به این دو زاویه (یا به طورکلی دو زاویه $\angle AOM = \alpha$ و $\angle AOM' = \pi - \alpha + 2k\pi$) نسبت بمحور سینوسها قرینهٔ یکدیگرند وسینوس این دو زاویه با یکدیگر برابر ولی سایر نسبتهای مثلثاتی همنام این دو زاویه دو به دوقرینهٔ یکدیگرند.



(شکل ۲۳)

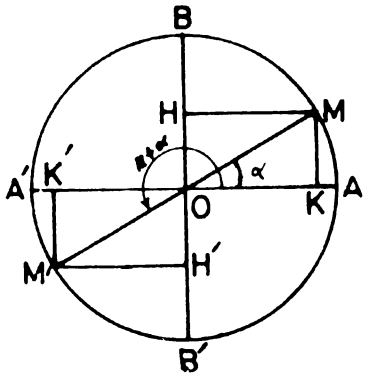
یعنی:

$$sin(\pi - \alpha) = sin\alpha$$
$$cos(\pi - \alpha) = -cos\alpha$$
$$tg(\pi - \alpha) = -tg\alpha \qquad (2)$$
$$cotg(\pi - \alpha) = -cotg\alpha$$

$$sin150^\circ = sin(180^\circ - 30^\circ) = sin30^\circ = \frac{1}{2}$$
$$tg135^\circ = tg(180^\circ - 45^\circ) = -tg45^\circ = -1$$

(۴-۶)- زوایای به تفاضل π رادیان

دو زاویه را به تفاضل π رادیان گوئیم اگر اندازهٔ جبری یکی از آنها $\angle AOM = \alpha$ باشد اندازهٔ جبری دیگری برابر $\pi + \alpha$ خواهد بود



(شکل ۲۴)

مانند دو زاویه $\frac{\pi}{۷}$ و $\frac{۸\pi}{۷}$ و (-۴۵° و ۱۳۵°) انتهای این دو کمان و زاویه روبروبه این دو کمان (یا به طور کلی انتهای دو زاویه $\angle AOM = \alpha$ و $\angle AOM' = \pi + \alpha + ۲k\pi$) نسبت به مرکز دایرهٔ مثلثاتی قرینهٔ یکدیگرند باتوجه بهشکل(۲۴) بهآسانی میتوان نتیجه گرفت که سینوسهای این دو زاویه باهم و همچنین کسینوسهای آنها با هم قرینهاند ولی تانژانتهای این دو زاویه باهم وکتانژانتهای آنها با هم برابرند یعنی :

$$\begin{aligned} \sin(\pi+\alpha) &= -\sin\alpha \\ \cos(\pi+\alpha) &= -\cos\alpha \\ tg(\pi+\alpha) &= tg\alpha \\ cotg(\pi+\alpha) &= cotg\alpha \end{aligned} \qquad (۳)$$

مثال - $\cos\frac{۷\pi}{۶} = \cos(\pi + \frac{\pi}{۶}) = -\cos\frac{\pi}{۶} = \frac{-\sqrt{۳}}{۲}$

و $cotg\,۲۴۰^\circ = cotg(۱۸۰^\circ + ۶۰^\circ) = cotg\,۶۰^\circ = \frac{\sqrt{۳}}{۳}$

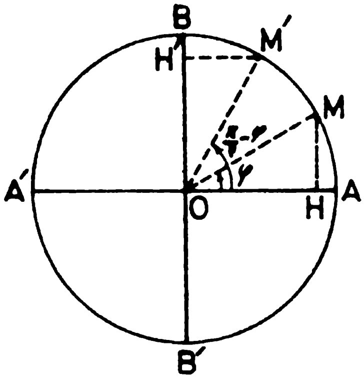
تذکر - با توجه بهآنکه دوکمان $\pi + \alpha$ و $-\alpha$ مکمل یکدیگرند میتوان فرمولهای (۳) را از رابطهٔ بین نسبتهای مثلثاتی دوکمان مکمل نتیجه گرفت:

$$\begin{aligned} \sin(\pi+\alpha) &= \sin(-\alpha) = -\sin\alpha \\ \cos(\pi+\alpha) &= -\cos(-\alpha) = -\cos\alpha \\ tg(\pi+\alpha) &= -tg(-\alpha) = +tg\alpha \\ cotg(\pi+\alpha) &= -cotg(-\alpha) = +cotg\alpha \end{aligned}$$

(۴-۷)- زاویههای متمم

دو زاویه را وقتی متمم گویند که مجموع اندازهٔ جبری آن دو، برابر $\frac{\pi}{۲}$ رادیان باشد مانند

18° و 72° و $\frac{\pi}{5}$ و $\frac{3\pi}{10}$ به طورکلی اگر اندازهٔ جبری یکی از آنها $\angle AOM = \varphi$ باشد اندازهٔ جبری دیگری $\angle AOM'$ برابر $\frac{\pi}{2} - \varphi$ است باتوجه به شکل (۲۵) به‌آسانی می‌توان نتیجه گرفت که دو مثلث قائم‌الزاویهٔ OMH و $OM'H'$ باهم برابرند یعنی $\overline{OH} = \overline{OH'}$ و $\overline{HM} = \overline{H'M'}$ می‌باشد در نتیجه $\overline{HM}$ که سینوس $\angle AOM$ است برابر $\overline{H'M'}$ که کسینوس $\angle AOM'$ است و همچنین کسینوس $\angle AOM$ یعنی $\overline{OH}$ برابر با سینوس $\angle AOM'$ یعنی $\overline{OH'}$ پس تانژانت $\angle AOM$ برابر کتانژانت $\angle AOM'$ وکتانژانت $\angle AOM$ برابر با تانژانت $\angle AOM'$ خواهد شد.



(شکل ۲۵)

یعنی:

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) = \cos\varphi$$

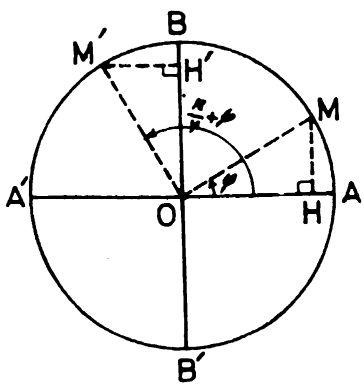
$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) = \sin\varphi$$

$$tg\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) = cotg\varphi \qquad (۴)$$

$$cotg\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) = tg\varphi$$

مثال : $\sin 68^\circ = \cos 22^\circ$ ویا $tg(74^\circ, 25') = cotg(15^\circ, 35')$

(۴-۸)- زوایای به‌تفاضل $\frac{\pi}{2}$ رادیان



(شکل ۲۶)

دو زاویه را به تفاضل $\frac{\pi}{2}$ رادیان گوئیم اگر اندازه جبری یکی ازآنها برابر با φ و اندازهٔ جبری دیگری برابر با $\varphi + \frac{\pi}{2}$ باشد. (شکل۲۶) دومثلث‌قائم‌الزاویهٔ OMH و $OM'H'$ به حالت وتر $(OM = OM')$ و یک زاویهٔ حاده $(\angle MOA = \angle M'OB)$ با یکدیگر برابرند پس

از آنجا $HM=H'M'$ و $OH=OH'$ مــی‌توان نتیجه گرفت که:

$$\sin(\frac{\pi}{۲}+\varphi)=\cos\varphi$$

$$\cos(\frac{\pi}{۲}+\varphi)=-\sin\varphi$$

(۵)

$$tg(\frac{\pi}{۲}+\varphi)=-cotg\varphi$$

$$cotg(\frac{\pi}{۲}+\varphi)=-tg\varphi$$

مثال -

$$tg۱۱۷^\circ=tg(۹۰^\circ+۲۷^\circ)=-cotg۲۷^\circ$$

و

$$\cos\frac{۳\pi}{۵}=\cos(\frac{\pi}{۲}+\frac{\pi}{۱۰})=-\sin\frac{\pi}{۱۰}$$

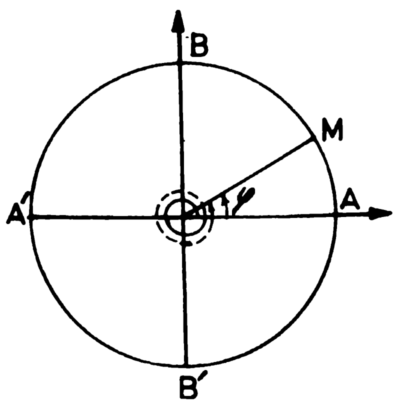
تذکر - فرمولهای (۵) را می‌توان از روی فــرمــولهای (۴) با تبدیل $\varphi-$ بــه $\varphi+$ به دست آورد:

$$\sin(\frac{\pi}{۲}+\varphi)=\cos(-\varphi)\Longrightarrow\sin(\frac{\pi}{۲}+\varphi)=\cos\varphi$$

$$\cos(\frac{\pi}{۲}+\varphi)=\sin(-\varphi)\Longrightarrow\cos(\frac{\pi}{۲}+\varphi)=-\sin\varphi$$

$$tg(\frac{\pi}{۲}+\varphi)=cotg(-\varphi)\Longrightarrow tg(\frac{\pi}{۲}+\varphi)=-cotg\varphi$$

$$cotg(\frac{\pi}{۲}+\varphi)=tg(-\varphi)\Longrightarrow cotg(\frac{\pi}{۲}+\varphi)=-tg\varphi$$



(شکل ۲۷)

(۴-۹)- زوایای به‌تفاضل $۲k\pi$ رادیان

زوایایی که انتهای کمانهای روبرو به آنها بر هم‌منطبق می‌باشند یعنی‌اختلاف دو کمان مضرب‌درستی ازیك دوران‌کامل باشد زوایای به‌تفاضل $۲k\pi$ رادیان گوئیم. همانطوریکه قبلا دیدیم هر دونسبت مثلثاتــی همنام‌این دوکمان باهم برابرند یعنی:

$$\sin(2k\pi+\varphi)=\sin\varphi$$
$$\cos(2k\pi+\varphi)=\cos\varphi$$
$$tg(2k\pi+\varphi)=tg\varphi \qquad (6)$$
$$cotg(2k\pi+\varphi)=cotg\varphi$$

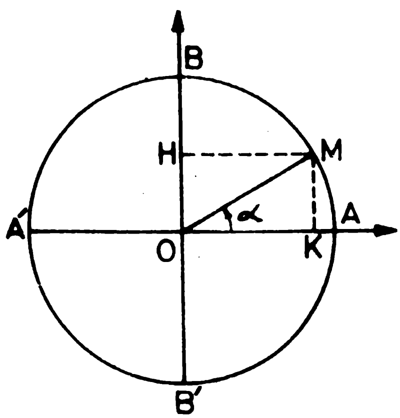
مثال-
$$\cos\frac{43\pi}{3}=\cos(7\times 2\pi+\frac{\pi}{3})=\cos\frac{\pi}{3}$$

و
$$\sin 1150^\circ=\sin(3\times 360^\circ+70^\circ)=\sin 70^\circ$$

تذکر - بسهولت بطریق مشابه می‌توان روابط بین دو زاویه که مجموع یا تفاضل آنها $\frac{3\pi}{2}$ است، بدست آورد.

(۴-۱۰)- دوره تناوب

فرض کنیم اندازهٔ جبری زاویهٔ $\angle AOM$ برابر با α باشد. (شکل ۲۸) اگر $\angle AOM$ به اندازهٔ 2π یا 4π و یا به‌طور کلی $2k\pi$ (برای $k\in Z$) رادیان تغییر کند (به α افزوده و یا ازآن کم شود)، انتهای کمان AM روبروی زاویه α همان نقطهٔ M باقی‌می‌ماند و درنتیجه‌سینوس‌و کسینوس این کمان تغییر نمی‌کندیعنی:



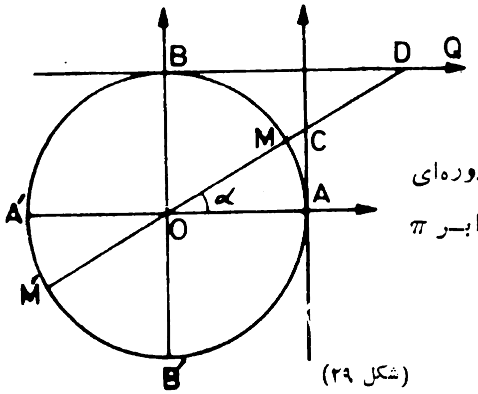
(شکل ۲۸)

$$\sin\alpha=\sin(\alpha+2\pi)=\sin(\alpha+4\pi)=\cdots=\sin(\alpha+2k\pi)$$

$$\cos\alpha=\cos(\alpha+2\pi)=\cos(\alpha+4\pi)=\cdots=\cos(\alpha+2k\pi)$$

دربیان‌خاصیت بالا، گفته‌می‌شود که‌سینوس‌و کسینوس‌یك زاویه، تابعهای‌دوره‌ای‌میباشند، و دورهٔ تناوب هریك ازآنها برابر 2π است. (درحقیقت 2π کوچکترین زاویه‌ای‌است که اگر به α اضافه شود سینوس وکسینوس آن تغییرنمی‌کند) همچنین اگر $\angle AOM$ به‌اندازهٔ π یا 2π و یابه طورکلی $k\pi$ رادیان $(k\in Z)$ تغییر کند انتهای کمان روبروبه زاویه AOM همان نقطهٔ M ویا نقطهٔ M' (قرینهٔ نقطهٔ M نسبت به مرکز دایره) می‌باشد (شکل ۲۹)، درنتیجه تانژانت و کتانژانت این زاویه تغییرنمی‌کندیعنی:

$$tg\alpha=tg(\alpha+\pi)=tg(\alpha+2\pi)=\ldots=tg(\alpha+k\pi)$$



(شکل ۲۹)

$$cotg\alpha = cotg(\alpha+\pi) = cotg(\alpha+2\pi) = \cdots = cotg(\alpha+k\pi)$$

تانژانت و کتانژانت یک زاویه تابعهای دوره‌ای می‌باشند و دورهٔ تناوب هریک از آنها برابر π می‌باشد.

تمرین

۱ـ کمان روبرو به زاویهٔ x را به مبدأ A و منتهای M در روی دایرهٔ مثلثاتی چنان انتخاب کنید که انتهای کمان در ناحیهٔ اول واقع باشد، قرینه و مکمل و متمم این زاویه را رسم کنید و انتهای هریک را در روی دایره نشان دهید.

۲ـ در دایرهٔ مثلثاتی به مبدأ A زوایائی را نشان دهید که سینوس آنها برابر با $\frac{3}{4}$ باشد. مسئله چند جواب دارد؟

۳ـ در دایرهٔ مثلثاتی به مبدأ A زوایائی را نشان دهید که کتانژانت آنها برابر با $2\frac{1}{2}$ باشد. مسئله چند جواب دارد؟

۴ـ نسبتهای مثلثاتی هریک از زوایای زیر را به دست آورید.

(الف) -135° (ب) 120° (پ) 210° (ت) 315° (ث) 330°

(ج) $-\frac{2\pi}{3}$ (چ) $\frac{5\pi}{4}$ (ح) $\frac{11\pi}{6}$ (خ) $\frac{5\pi}{6}$

۵ـ هریک از عبارتهای زیر را برحسب نسبتهای مثلثاتی a بنویسید.

(الف) $sin(540^\circ+a^\circ)$ (ب) $cos(450^\circ+a^\circ)$ (پ) $tg(270^\circ+a^\circ)$

(ت) $cotg(a^\circ-270^\circ)$ (ث) $cos(900^\circ-a^\circ)$ (ج) $sin(a^\circ-720^\circ)$

۶ـ آیا رابطه‌های زیر درست‌اند؟

(الف) $sin120^\circ - sin90^\circ = sin(120^\circ-90^\circ) = sin30^\circ$

(ب) $cos60^\circ + cos120^\circ = cos(60^\circ+120^\circ) = cos180^\circ$

(پ) $2\sin 135^\circ = \sin 270^\circ$

(ت) $cotg 45^\circ + cotg 30^\circ = cotg(45^\circ + 30^\circ) = cotg 75^\circ$

۷ـ درعبارت $\cos^2 x - \cos x + 2$ ، x را به $-x$ تبدیل کنید. آیا عبارت تغییر می‌کند؟

۸ـ در عبارت $tg x + 2 cotg x - 3$، x را به $\pi + x$ تبدیل کنید. آیا عبارت تغییر می‌کند؟

۹ـ درعبارت $2\sin^2 x - \sin x \cos x + a\cos^2 x$ ، x را به $\pi + x$ تبدیل کنید آیا عبارت تغییر می‌کند؟

۱۰ـ اگر بدانیم $tg 75^\circ = 2 + \sqrt{3}$، حاصل عبارت $\dfrac{3\sin 375^\circ + 2\sin 105^\circ}{\cos 165^\circ - \cos 255^\circ}$ را حساب کنید.

۱۱ـ درستی رابطه‌های زیر را بررسی کنید:

(الف) $\sin 200^\circ + 2\sin 160^\circ - \cos 70^\circ + 3\sin 340^\circ - 4\cos 110^\circ = \sin 20^\circ$

(ب) $tg(\alpha - 5\pi) cotg(\alpha + 7\pi) - \cos(38\pi - \alpha)\cos(\alpha - 38\pi) = \sin^2\alpha$

۱۲ـ درصورتی که $\sin\alpha = \dfrac{8}{17}$ وانتهای کمان روبرو به زاویهٔ α درناحیهٔ دوم دایرهٔ مثلثاتی باشد مطلوب است محاسبهٔ عبارتهای زیر:

$$cotg(\frac{3\pi}{2} - \alpha) \quad ، \quad tg(\frac{\pi}{2} + \alpha) \quad ، \quad \cos(2\pi - \alpha) \quad ، \quad \sin(\frac{3\pi}{2} + \alpha)$$

فصل پنجم

جدول اندازه‌های نسبتهای مثلثاتی وحل معادله‌های مثلثاتی

تعیین اندازهٔ نسبتهای مثلثاتی یك زاویه و تعیین زاویه‌ای که یکی از نسبتهای مثلثاتی آن معلوم است

چنان که درفصل قبل دیدید مقدارعددی نسبتهای مثلثاتی زاویـه‌های °۳۰ و °۴۵ و °۶۰ محاسبه شد و با توجه به‌آنچه‌که در درسهای آینده خواهید دید مقادیرنسبتهای مثلثاتی را برای بعضی از زاویه‌هـای دیگـر مـی‌توان حساب کرد. اما به‌طور کلی مقادیر نسبتهای مثلثاتی برای همهٔ زاویه‌ها را نمی‌توان به‌طریقی که درموردمحاسبهٔ چند زاویهٔ مخصوص گفته‌شده به‌طور دقیق به دست‌آورد. برای این منظور روش زیررا به‌کار می‌برند.

(۵ـ۱)ـ مقادیرنسبتهای مثلثاتی زاویهٔ حاده

مقدارتقریبی نسبتهای مثلثاتی زاویه‌های حاده را حساب کرده و در جدولهایی نوشته‌اند بعضی‌ازاین‌جدولها، مقدارنسبتهای مثلثاتی‌را با سه‌رقم اعشار وبرخی‌دیگر، باچهاررقم‌اعشار نشان می‌دهند.

جداولی که درآخر کتاب نوشته شده‌اند مقادیرنسبتهای مثلثاتی‌را برای زاویه‌های‌حاده تا چهاررقم اعشارنشان می‌دهد. دراین جداول مقادیرنسبتهای مثلثاتی زاویه‌ها از °۱ تا °۹۰نوشته شده است.

نخستین‌ستون سمت‌چپ جدول‌اندازهٔ زاویه را برحسب درجه ورادیان نشان می‌دهد و در ستونهای دوم و سوم وچهارم و پنجم به ترتیب اندازهٔ سینوس وکسینوس و تانژانت وکتانژانت زاویه نوشته شده است.

برای استفاده از این جدولها باید ابتدا اندازهٔ زاویه را در ستون سمت چپ پیدا کرده و در مقابل آن، درستون مـربوط به نسبت مثلثاتی مورد نظر که نام آن دربالای ستون نوشته شده است مقدار آن را ملاحظه کرد.

مثلا با استفاده از جدول می‌توان نوشت:

و $tg۵۳^\circ = ۱/۳۲۷۰$ و $\cos۳۱^\circ = ۰/۸۵۷۲$ و $\sin۸^\circ = ۰/۱۳۹۲$

$cotg۷۹^\circ = ۰/۱۹۴۴$

اگر زاویه‌ای شامل درجه و دقیقه باشد مقادیر نسبتهای مثلثاتی چنین زاویه‌ای در این جدولها درج نشده است و برای استفاده از این جدولها تغییرات زاویه و نسبتهای مثلثاتی ما بین هر دو زاویهٔ مندرج در جدول را متناسب فرض می‌کنند. نتیجه‌ای که به‌این ترتیب به‌دست می‌آید تقریبی است و در بسیاری از موارد کافی می‌باشد و با توجه به همین متناسب بودن، این نسبتها را تعیین می‌کنند. چند مثال زیر مطلب را روشن می‌کند.

مثال ۱- $\sin۳۶^\circ, ۲۵'$ را حساب کنید.

حل- از روی جدول مربوط معلوم می‌شود که:

$$\begin{aligned}\sin۳۶^\circ &= ۰/۵۸۷۸\\ \sin۳۷^\circ &= ۰/۶۰۱۸\end{aligned}$$

و $۳۷^\circ - ۳۶^\circ = ۱^\circ = ۶۰'$ و $۰/۶۰۱۸ - ۰/۵۸۷۸ = ۰/۰۱۴۰$

بنابراین اگر $۶۰'$ به زاویهٔ ۳۶° اضافه شود به سینوس این زاویه ۰/۰۱۴ اضافه می‌شود پس اگر $۲۵'$ به این زاویه اضافه شود به سینوس آن $\frac{۲۵}{۶۰} \times ۰/۰۱۴ = ۰/۰۰۵۸$ اضافه خواهد شد در نتیجه $\sin۳۶^\circ, ۲۵' = ۰/۵۸۷۸ + ۰/۰۰۵۸ = ۰/۵۹۳۶$

مثال ۲- $\cos۶۳^\circ, ۳۶'$ را حساب کنید.

حل- از روی جدول مربوط معلوم می‌شود که:

$$\begin{aligned}\cos۶۳^\circ &= ۰/۴۵۴۰\\ \cos۶۴^\circ &= ۰/۴۳۸۴\end{aligned}$$

و $۶۴ - ۶۳ = ۱^\circ = ۶۰'$ و $۰/۴۵۴۰ - ۰/۴۳۸۴ = ۰/۰۱۵۶$

بنابراین اگر $۶۰'$ به زاویهٔ ۶۳° اضافه شود از کسینوس این زاویه ۰/۰۱۵۶ کم می‌شود پس اگر $۳۶'$ به این زاویه اضافه شود از کسینوس آن $\frac{۳۶}{۶۰} \times ۰/۰۱۵۶ = ۰/۰۰۹۳$ کم خواهد شد در نتیجه $\cos۶۳^\circ, ۳۶' = ۰/۴۵۴۰ - ۰/۰۰۹۳ = ۰/۴۴۴۷$

مثال ۳- $tg۵۴^\circ, ۲۴'$ را حساب کنید.

حل- از روی جدول مربوط معلوم می‌شود که:

$$\begin{aligned}tg۵۴^\circ &= ۱/۳۷۶۴\\ tg۵۵^\circ &= ۱/۴۲۸۱\end{aligned}$$

و $۵۵^\circ - ۵۴^\circ = ۱^\circ = ۶۰'$ و $۱/۴۲۸۱ - ۱/۳۷۶۴ = ۰/۰۵۱۷$

بنابراین اگر $۶۰'$ به زاویهٔ ۵۴° اضافه شود به تانژانت این زاویه ۰/۰۵۱۷ اضافه می‌شود پس اگر $۲۴'$ به این زاویه اضافه شود به تانژانت آن

$$\frac{۲۴}{۶۰} \times ۰/۰۵۱۷ = ۰/۰۲۰۶$$

اضافه خواهد شد در نتیجه :

$$tg54^\circ,24' = 1/3764 + 0/0206 = 1/3970$$

مثال۴- $cotg72^\circ,37'$ را حساب کنید .

حل - از روی جدول مربوط معلوم می‌شود که :

$$\begin{aligned} cotg72^\circ &= 0/3249 \\ cotg73^\circ &= 0/3057 \end{aligned} \quad \text{و} \quad 73^\circ - 72^\circ = 1^\circ = 60' \text{ و } 0/3249 - 0/3057 = 0/0192$$

بنابراین اگر $60'$ به زاویهٔ 72° اضافه شود ازکتانژانت این زاویه ۰/۰۱۹۲ کم می‌شود

پس اگر $37'$ به این زاویه اضافه شود از کتانژانت آن $\frac{37}{60} \times 0/0192 = 0/0118$ کم خواهد شد در نتیجه

$$cotg72^\circ,37' = 0/3249 - 0/0118 = 0/3131$$

با توجه به مثالهایی که دیدید و چنان‌که از روی جدول ملاحظه می‌شود می‌توان چنین نتیجه گرفت:

اگر $0 \leqslant \alpha \leqslant \frac{\pi}{2}$ ، $0 \leqslant \beta \leqslant \frac{\pi}{2}$ با $\alpha < \beta$ ، پس:

۱- $sin\alpha < sin\beta$ ۲- $cos\alpha > cos\beta$

۳- $tg\alpha < tg\beta$ ۴- $cotg\alpha > cotg\beta$

همچنین اگر سینوس یا تانژانت زاویه حاده α از سینوس یا تانژانت زاویه حاده β بیشترباشد پس $\alpha > \beta$ و اگر کسینوس یا کتانژانت زاویه حاده α از کسینوس یا کتانژانت زاویه حاده β بیشتر باشد پس $\alpha < \beta$.

تذکر - این نتیجه‌ها را به‌آسانی از روی شکل می‌توان به دست آورد.

(۲-۵)- مقادیر نسبتهای مثلثاتی برای یك‌زاویه دلخواه، با تحویل به ربع اول

از جدولهای آخر کتاب می‌توان برای تعیین اندازهٔ نسبتهای مثلثاتی هرزاویه استفاده کرد و برای این منظور باید به‌کمك فرمولهای (۱) و (۲) و (۳) و (۴) و (۵) و (۶) فصل‌چهارم زاویه‌ای مانند α بین صفردرجه و 90° چنان تعیین کرد که مقادیر نسبتهای مثلثاتی آن برابر باقدرمطلق‌مقادیرنسبتهای مثلثاتی برای‌زاویه داده شده باشد،این‌عمل‌را تحویل به **ربع اول‌دایرهٔ مثلثاتی می گویند.**

به‌طوری که گفته شدهر گاه به‌اندازهٔ جبری یك‌زاویه مضرب‌صحیحی ازیك دوران کامل

افزوده و یا از آن کم کنیم انتهای کمان روبروبه این زاویه در روی دایرهٔ مثلثاتی ثابت می‌ماند و درنتیجه مقادیر نسبتهای مثلثاتی برای آن تغییر نمی کند. بنابراین برای پیدا کردن مقادیر نسبتهای مثلثاتی برای یك زاویه‌مانند φ درصورت لزوم مضرب صحیحی از یك دوران کامل از φ کم و یا به آن اضافه می کنیم تا زاویه‌مثبتی مانند α بین صفر و 2π بدست آید. بدین ترتیب نسبتهای مثلثاتی زاویه α برابر با نسبتهای مثلثاتی φ می باشد. برحسب آن که انتهای کمان روبرو به زاویهٔ α در یکی از ناحیه‌های چهارگانهٔ دایرهٔ مثلثاتی قرار گیرد چهار حالت اتفاق می افتد:

الف ـ اگر α زاویهٔ حاده باشد مقادیر نسبتهای مثلثاتی α را مستقیماً از روی جدول مثلثاتی تعیین می کنیم.

ب ـ اگر اندازهٔ α بین $\frac{\pi}{2}$ و π رادیان باشد مکمل آن را که زاویهٔ حاده است به دست می آوریم و با توجه به رابطه‌های بین نسبتهای مثلثاتی دو زاویه مکمل (رابطهٔ شمارهٔ ۲) مقادیر نسبتهای مثلثاتی α را به دست می آوریم.

پ ـ اگر اندازهٔ زاویهٔ α بین π و $\frac{3\pi}{2}$ رادیان باشد مقادیر نسبتهای مثلثاتی برای آن را به کمك **رابطه‌های شمارهٔ ۳ به‌دست می‌آوریم.**

ت ـ اگر اندازهٔ زاویهٔ α بین $\frac{3\pi}{2}$ و 2π رادیان باشد مقادیر نسبتهای مثلثاتی برای آن را به کمك **رابطه‌های شمارهٔ ۶ می‌توان به‌دست آورد.**

مثال ۱ـ مطلوب است محاسبه مقادیر نسبتهای مثلثاتی برای زاویه (-887°). ابتدا به این زاویه سه برابر یك دوران کامل دایره یعنی $3 \times 360^\circ$ را اضافه می‌کنیم.

$$\sin(-887^\circ) = \sin(1080^\circ - 887^\circ) = \sin 193^\circ$$

$$\sin 193^\circ = \sin(180^\circ + 13^\circ) = -\sin 13^\circ = -0/2250$$

$$\cos(-887^\circ) = \cos 193^\circ = \cos(180^\circ + 13^\circ) = -\cos 13^\circ = 0/9744$$

$$tg(-887^\circ) = tg 193^\circ = tg(180^\circ + 13^\circ) = tg 13^\circ = 0/2309$$

$$cotg(-887^\circ) = cotg(193^\circ) = cotg(180^\circ + 13^\circ) = cotg 13^\circ = 4/3315$$

مثال ۲ ـ نسبتهای مثلثاتی زاویه 1550° را تعیین کنید.

ابتدا معلوم می کنیم که زاویه 1550° شامل چند دوران کامل است.

$$1550^\circ = 4 \times 360^\circ + 110^\circ$$

بنابراین با توجه به فرمولهای خوانده شده داریم

$$\sin 1550^\circ = \sin(4 \times 360^\circ + 110^\circ) = \sin 110^\circ$$

$$\cos 1550^\circ = \cos(4\times 360^\circ + 110^\circ) = \cos 110^\circ$$

$$tg\,1550^\circ = tg(4\times 360^\circ + 110^\circ) = tg\,110^\circ$$

$$cotg\,1550^\circ = cotg(4\times 360^\circ + 110^\circ) = cotg\,110^\circ$$

حال با استفاده از فرمولهای (۲) خواهیم داشت :

$$\sin 110^\circ = \sin(180^\circ - 70^\circ) = \sin 70^\circ = 0.9397$$

$$\cos 110^\circ = \cos(180^\circ - 70^\circ) = -\cos 70^\circ = -0.3420$$

$$tg\,110^\circ = tg(180^\circ - 70^\circ) = -tg\,70^\circ = -2.7475$$

$$cotg\,110^\circ = cotg(180^\circ - 70^\circ) = -cotg\,70^\circ = -0.3640$$

و همچنین با استفاده از فرمولهای (۵) چنین نوشت :

$$\sin 110^\circ = \sin(90^\circ + 20^\circ) = \cos 20^\circ = 0.9397$$

$$\cos 110^\circ = \cos(90^\circ + 70^\circ) = -\sin 20^\circ = -0.3420$$

$$tg\,110^\circ = tg(90^\circ + 20^\circ) = -cotg\,20^\circ = -2.7475$$

$$cotg\,110^\circ = cotg(90^\circ + 20^\circ) = -tg\,20^\circ = -0.3640$$

مثال۳- نسبتهای مثلثاتی زاویه °۵۷ را تعیین کنید.

چنان که میدانید نسبتهای مثلثاتی زاویه °۵۷ درجدول آخر کتاب وجود دارند و **می‌توان مستقیماً از روی جدول مقدار هر یك از این نسبتها را نوشت ازطرف دیگر متمم زاویهٔ** °۵۷ زاویهٔ °۳۳ است[1] و با توجه به رابطهٔ بین نسبتهای مثلثاتی زوایای متمم فرمول (۵) **می‌توان نوشت :**

$$\sin 57^\circ = \sin(90^\circ - 33^\circ) = \cos 33^\circ = 0.8387$$

$$\cos 57^\circ = \cos(90^\circ - 33^\circ) = \sin 33^\circ = 0.5446$$

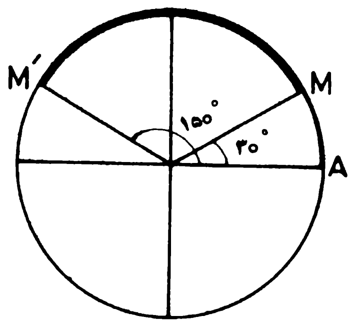
$$tg\,57^\circ = tg(90^\circ - 33^\circ) = cotg\,33^\circ = 1.5399$$

$$cotg\,57^\circ = cotg(90^\circ - 33^\circ) = tg\,33^\circ = 0.6494$$

مثال۴- حدود m را چنان تعیین کنید که $\sin x = \frac{2m-1}{m-1}$ **بوده و** $30^\circ < x < \frac{500}{3}gr$ باشد.

۱ـ دربعضی ازجدولهای مثلثاتی به جای این‌که مقدار نسبتهای مثلثاتی برای زاویه‌های بین صفردرجه تا °۹۰ نوشته شود، نسبتهای مثلثاتی زاویه‌ها بین صفر درجه تا °۴۵ نوشته شده است، دراین صورت برای تعیین مقادیر نسبتهای مثلثاتی زاویه‌ای که بین °۴۵ و °۹۰ واقع است از نسبتهای مثلثاتی زاویه متمم آن که (بین °۰ تا °۴۵) قرار دارد استفاده می‌کنند.

حل ـ انتهای کمان روبرو به زاویهٔ x در ربع اول یا دوم قرار داشته و بین دو زاویه 30° و $\frac{500}{3}gr$ است و $\frac{500}{3}gr = 150^\circ$ با توجه به شکل (۳۰) به آسانی معلوم می‌شود که وقتی انتهای کمان روبرو به زاویه‌ای بین دو نقطهٔ M و M' تغییر کند سینوس آن زاویه بین ۱ و $\frac{1}{2}$ تغییر می کند یعنی $\frac{1}{2} < \sin x \leqslant 1$.



(شکل ۳۰)

پس :

$$\begin{cases} \dfrac{2m-1}{m-1} \leqslant 1 \\ \dfrac{2m-1}{m-1} > \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

از آنجا پس از حل دو نامعادله و پیدا کردن جواب مشترک آنها

نتیجه می‌شود $0 \leqslant m < \frac{1}{3}$

مثال۵- اگر $\sin\alpha = \sqrt{\frac{3}{7}}$ باشد مطلوب است محاسبهٔ :

$$P = \frac{3\sin(-\frac{13\pi}{2} + \alpha) + 2\cos(17\pi - \alpha)}{3tg(\frac{15\pi}{2} - \alpha) - 2cotg(\alpha - 15\pi)}$$

حل:

$$\sin(-\frac{13\pi}{2} + \alpha) = \sin(-8\pi + \frac{3\pi}{2} + \alpha) = \sin(\frac{3\pi}{2} + \alpha)$$

بنا براین

$$\sin(-\frac{13\pi}{2} + \alpha) = \sin[\pi + (\frac{\pi}{2} + \alpha)] = -\sin(\frac{\pi}{2} + \alpha) = -\cos\alpha$$

و $\cos(۱۷\pi-\alpha)=\cos(۱۶\pi+\pi-\alpha)=\cos(\pi-\alpha)=-\cos\alpha$

$$tg(\frac{۱۵\pi}{۲}-\alpha)=tg(۷\pi+\frac{\pi}{۲}-\alpha)=tg(\frac{\pi}{۲}-\alpha)=cotg\alpha$$

و

$$cotg(\alpha-۱۵\pi)=cotg(\alpha-۱۵\pi+۱۵\pi)=cotg\alpha$$

پس: $P=\frac{-۳\cos\alpha-۲\cos\alpha}{۳cotg\alpha-۲cotg\alpha}$ و یا $P=-۵\sin\alpha$ پس $P=-۵\sqrt{\frac{۳}{۷}}$

مثال ۶ - می‌دانیم که $tg\frac{\pi}{۸}=\sqrt{۲}-۱$، مقدار عبارت زیر را حساب کنید:

$$A=\frac{\cos۲۰۲/۵^\circ+\cos۱۱۲/۵^\circ}{\cos۳۳۷/۵^\circ-\cos۶۷/۵^\circ}$$

حل- ملاحظه می‌کنیم که

$$\cos(۲۰۲/۵^\circ)=\cos(۱۸۰^\circ+۲۲/۵^\circ)=-\cos۲۲/۵^\circ=-\cos\frac{\pi}{۸}$$

$$\cos(۱۱۲/۵^\circ)=\cos(۹۰^\circ+۲۲/۵^\circ)=-\sin۲۲/۵^\circ=-\sin\frac{\pi}{۸}$$

$$\cos(۳۳۷/۵^\circ)=\cos(۳۶۰^\circ-۲۲/۵^\circ)=\cos۲۲/۵^\circ=\cos\frac{\pi}{۸}$$

$$\cos(۶۷/۵^\circ)=\cos(۹۰^\circ-۲۲/۵^\circ)=\sin۲۲/۵^\circ=\sin\frac{\pi}{۸}$$

پس : $A=\frac{-\cos۲۲/۵^\circ-\sin۲۲/۵^\circ}{\cos۲۲/۵^\circ-\sin۲۲/۵^\circ}$ **اگر صورت و مخرج کسر را به** $\cos۲۲/۵^\circ$ **تقسیم کنیم خواهیم داشت .**

$$A=\frac{-۱-tg۲۲/۵^\circ}{۱-tg۲۲/۵^\circ}=\frac{-۱-tg\frac{\pi}{۸}}{۱-tg\frac{\pi}{۸}}=\frac{-۱-\sqrt{۲}+۱}{۱-\sqrt{۲}+۱}=-(\sqrt{۲}+۱)$$

(۳-۵)- تعیین زاویهٔ حاده‌ای که یکی از نسبتهای مثلثاتی آن معلوم است.

فرض کنیم مقدار نسبت مثلثاتی داده شده مثبت باشد (سینوس و یا کسینوس یك زاویـه **باید کوچکتر از یك باشد) و مقصود فقط تعیین زاویهٔ حادهٔ مربوط به‌آن می‌باشد.**

وقتی یکی از مقادیر نسبتهای مثلثاتی زاویـه داده شده باشد با توجه به مقادیر نسبتهای

مثلثاتی برای زاویه‌های ۳۰° و ۴۵° و ۶۰° اولا می‌توان تعیین کرد که این زاویه در کدامیك از فاصله‌های (۳۰° تا ۰°) یا (۴۵° تا ۳۰°) یا (۶۰° تا ۴۵°) ویا (۹۰° تا ۶۰°) قراردارد سپس بـا مراجعه به‌جدول می‌توان زاویه را تعیین کرد.

حالت اول - مقدار نسبت مثلثاتی داده‌شده عیناً درجدول وجوددارد. دراین‌صورت نسبت **مثلثاتی داده شده در ستون مربوط به‌آن در جدول موجود می‌بـاشد و سطری کـه از این عدد به‌ستون مربوط به زاویه منتهی می‌شود اندازهٔ زاویهٔ خواسته شده را نشان می‌دهد.**

مثال۱- مطلوب است تعیین زاویهٔ حاده‌ای که سینوس آن ۰٫۶۲۹۳ باشد.

چنان‌که می‌دانید $\sin ۳۰^\circ = \frac{۱}{۲} = ۰/۵۰۰۰$ **و** $\sin ۴۵^\circ = \frac{\sqrt{۲}}{۲} = ۰/۷۰۷۱$

حال باتوجه به‌اینکه $۰/۷۰۷۱ > ۰/۶۲۹۳ > ۰/۵۰۰۰$ **نتیجه‌می‌شود که زاویهٔ‌مطلوب بین (۴۵° و ۳۰°) واقع است بنا براین در ستون سینوسها بیـن سینوس زاویه‌هـای بزرگتر از ۳۰° و کوچکتر از ۴۵° عدد ۰٫۶۲۹۳ را جستجو می کنیم، مشاهـده می‌شود که این عدد در جدول وجود دارد و سطری که از این عدد به‌ستون زاویه‌ها منتهی می‌شود زاویـهٔ ۳۹° را نشان می‌دهد بنا براین :**

$$\sin ۳۹^\circ = ۰/۶۲۹۳$$

مثال۲- مطلوب‌است تعیین زاویهٔ حاده‌ای که کتانژانت آن برابر ۰٫۴۴۵۲ باشد. چنان‌که مـــی‌دانید $\cot g ۶۰^\circ = \frac{\sqrt{۳}}{۳} = ۰/۵۷۷۴$ **است و با توجه به‌آن‌که هرچه زاویهٔ حاده بـزرگتر شود کتانژانت‌آن کوچکتر می گردد از نامساوی** $۰/۴۴۵۲ < ۰/۵۷۷۴$ **نتیجه می‌شود که زاویهٔ مطلوب از زاویهٔ ۶۰° بزرگتر می‌باشد و لذا در ستون کتانـژانتها بین کتانژانتهای زاویه‌های بزرگتر از ۶۰° جستجو می کنیم مشاهده می‌شود که این عدد در جـدول وجود دارد و سطـری که از این عدد به ستون زاویه‌ها منتهی می‌شود زاویهٔ ۶۶° را نشان می‌دهد یعنی :**

$$\cot g ۶۶^\circ = ۰/۴۴۵۲$$

حالت دوم - مقدار نسبت مثلثاتی داده شده درجدول موجود نمی‌باشد.

در این صورت پس از تعیین فاصله‌ای که زاویه در آن واقع است و با جستجو کردن درستون مربوط به آن‌مقدارنسبت مثلثاتی درجدول دوعدد قبل و بعدمقدارنسبت مثلثاتی داده‌شده را می‌نویسیم ومقدار تقریبی زاویهٔ موردنظر را با توجه به اختلاف بین ایـن دوعدد واختلاف مقدارنسبت مثلثاتی داده‌شده بامقدارنسبت مثلثاتی زاویهٔ کوچکترو به کمك تناسب تعیین‌می کنیم

برای روشن شدن مطلب به مثالهای زیر توجه شود:

مثال۱- مطلوب است تعیین زاویه‌ای که سینوس آن برابر ۰/۷۴۷۵ باشد.

داریم : $\sin ۶۰^\circ = ۰/۸۶۶۰$ و $\sin ۴۵^\circ = \frac{\sqrt{۲}}{۲} = ۰/۷۰۷۱$

وچون $۰/۷۰۷۱ < ۰/۷۴۷۵ < ۰/۸۶۶۰$

نتیجه می‌شود که زاویهٔ خواسته شده بین °۶۰ و °۴۵ واقع است و لذا در ستون سینوسها، بین سینوس زاویه‌های بزرگتر از °۴۵ و کوچکتر از °۶۰ عدد ۰/۷۴۷۵ را جستجو می‌کنیم مشاهده می‌شود که این عدد در جدول وجود ندارد اما دو عدد قبل و بعد آن عبارتند از :

$\sin ۴۸^\circ = ۰/۷۴۳۱$

$\sin ۴۹^\circ = ۰/۷۵۴۷$

یعنی زاویهٔ خواسته شده از °۴۸ بیشتر و از °۴۹ کمتر است برای محاسبهٔ دقیقه‌های این زاویه می‌توان چنین عمل کرد :

$۴۹^\circ - ۴۸^\circ = ۱^\circ = ۶۰'$

$۰/۷۵۴۷ - ۰/۷۴۳۱ = ۰/۰۱۱۶$ و $۰/۷۴۷۵ - ۰/۷۴۳۱ = ۰/۰۰۴۴$

افزایش سینوس	افزایش زاویه
$۰/۰۱۱۶$	$۶۰'$
$۰/۰۰۴۴$	$x = ۶۰' \times \frac{۰/۰۰۴۴}{۰/۰۱۱۶} = ۲۲/۷۵'$

اما $۰/۷۵'$ برابراست با $\frac{۷۵}{۱۰۰} \times ۶۰ = ۴۵''$ بنابراین اگر زاویهٔ خواسته شده را α

بنامیم داریم $\alpha = ۴۸^\circ\ ,\ ۲۲'\ ,\ ۴۵''$

مثال۲- مطلوب است تعیین زاویه‌ای که کسینوس آن ۰/۹۳۶۶ باشد

داریم : $\cos ۳۰^\circ = \frac{\sqrt{۳}}{۲} = ۰/۸۶۶۰$

چون $۰/۹۳۶۶ > ۰/۸۶۶۰$ می‌باشد لذا زاویهٔ مطلوب از °۳۰ کوچکتر می‌باشد بنابراین درستون کسینوسها بین کسینوس زاویه‌های کوچکتر از °۳۰ عدد ۰/۹۳۶۶ را جستجو می‌کنیم مشاهده می‌شود که این عدد در جدول وجود ندارد ولی دو عدد قبل و بعد آن عدد عبارتند از :

$\cos ۲۰^\circ = ۰/۹۳۹۷$ و $\cos ۲۱^\circ = ۰/۹۳۳۶$

یعنی زاویهٔ خواسته شده از °۲۰ بیشتر و از °۲۱ کمتر است برای محاسبهٔ دقیقه‌های

این زاویه می‌توان چنین عمل کرد :

$$۲۱^\circ - ۲۰^\circ = ۱^\circ = ۶۰'$$

$$۰/۹۳۹۷ - ۰/۹۳۳۶ = ۰/۰۰۶۱$$

$$۰/۹۳۹۷ - ۰/۹۳۶۶ = ۰/۰۰۳۱$$

افزایش زاویه	کاهش کسینوس
$۶۰'$	۰/۰۰۶۱
$x = ۶۰' \times \frac{۰/۰۰۳۱}{۰/۰۰۶۱} = ۳۰/۴۹'$	۰/۰۰۳۱

اما $۰/۴۹'$ برابر با $\frac{۴۹}{۱۰۰} \times ۶۰ = ۲۹/۴''$ می‌باشد. در نتیجه :

$$\alpha = ۲۰^\circ \ , \ ۳۰' \ , \ ۲۹/۴''$$

(۴-۵)- تعیین همهٔ زاویه‌هایی که مقدار یکی از نسبتهای مثلثاتی آن معلوم است

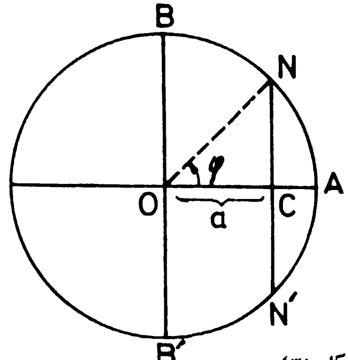
مقدار یک نسبت مثلثاتی داده شده عددی است حقیقی ومقصود تعیین تمام زاویه‌هایی است که مربوط به این مقدار نسبت مثلثاتی می‌باشند.

برای بیان این مطلب چهار مسئلهٔ زیر را حل و بررسی می‌کنیم:

مسئلهٔ ۱ - مطلوب است تعیین تمام زاویه‌هایی که کسینوس آنها برابر عدد داده شدهٔ a می‌باشد یعنی:

$\cos x = a$ و $x = ?$ اولا باید توجه داشت مسئله وقتی جواب دارد که $-۱ \leqslant a \leqslant ۱$

حل هندسی : الف- اگر $۰ \leqslant a \leqslant ۱$، در دایرهٔ مثلثاتی روی محور کسینوسها ودرجهت مثبت (شکل ۳۱) نقطهٔ C را چنان اختیار می‌کنیم که $\overline{OC} = a$ باشد سپس از C خطی موازی محور سینوسها رسم می‌کنیم تا محیط دایرهٔ مثلثاتی را در دو نقطهٔ N و N' که نسبت به محور کسینوسها قرینهٔ یکدیگر می‌باشند قطع کند کلیهٔ زاویه‌های روبه‌رو به کمانهای مثلثاتی AN و تمام زاویه‌های روبه‌رو به کمانهای AN' زوایای مطلوب می‌باشند و کسینوس همهٔ این کمانها برابر a است. بنا به قرارداد زاویهٔ روبرو به کمانی که انتهای آن در ربع اول واقع بوده و اندازهٔ آن بین صفر و $\frac{\pi}{۲}$ است زاویهٔ اصلی می‌نامند و اگر اندازهٔ این زاویه را (برحسب رادیان)



(شکل ۳۱)

برابر φ فرض کنیم $0 \leqslant \varphi \leqslant \frac{\pi}{2}$ است این زاویه را به صورت زیر نشان می‌دهند:

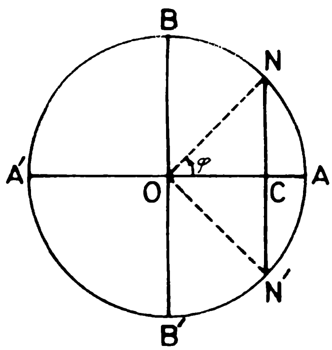
$\varphi = Arccos a$ و می‌خوانند «φ برابر است با آرك کسینوس a.»

مثلاً اگر $a = \frac{\sqrt{2}}{2}$ باشد، مقصود از $Arccos \frac{\sqrt{2}}{2}$، تنها زاویهٔ $\frac{\pi}{4}$ است و اندازهٔ تمام زوایای روبروبه کمانهای AN را می‌توان چنین نوشت: $\varphi + 2k\pi$. همچنین یکی از اندازه‌های زاویهٔ روبروبه کمان AN' برابر $-\varphi$ است بنابراین اندازهٔ تمام زوایای روبرو به کمانهای AN' به صورت $-\varphi + 2k\pi$ نوشته می‌شوند، پس تمام زوایایی که کسینوس آنها برابرمقدار معلوم a باشد عبارتند از:

$$x = \pm\varphi + 2k\pi$$

(اندازهٔ این زوایا برحسب رادیان x فرض شده‌اند) از رابطهٔ اخیر معلوم می‌شود که مسئله جوابهای بی‌شمار دارد و با دانستن اندازهٔ یك جواب مسئله مانند φ $(0 \leqslant \varphi \leqslant \frac{\pi}{2})$ سایر جوابهای مسئله به دست می‌آیند. از آنچه گفته شد نتیجه می‌شود که اگر دو زاویهٔ x و φ هردو دارای کسینوس برابر باشند، یعنی اگر $cos x = cos \varphi$، آن گاه مجموع ویا تفاضل آن دو زاویه مضرب زوجی از π می‌باشد یعنی:

$$x \pm \varphi = 2k\pi$$



(شکل ۳۲)

مثال ۱ - تمام زوایایی را تعیین کنید که کسینوس آنها برابر ۰/۶ باشد. یعنی:

$$cos x = 0/6$$

روی محور کسینوسها OC را برابر ۰/۶ واحد جدا کرده سپس از C خطی به موازات BB' رسم می‌کنیم تا دایره را در دونقطهٔ N و N' قطع کند (شکل۳۲) زاویهٔ AON بااستفاده ازجدول مقدارنسبتهای مثلثاتی تقریباً برابر $53°, 8'$ است پس زاویهٔ AON' تقریباً برابر $-(53°, 8')$ می‌باشد از آنجا:

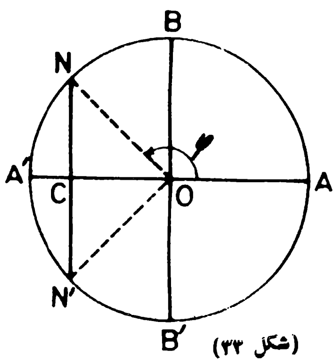
$$x = k \times 360° - (53° , 8') \text{ و } k \in Z$$

و یا

$$x = k \times 360° + 53° , 8'$$

به دست می‌آید و زاویهٔ اصلی عبارت است از:

$$Arccos 0/6 = 53° , 8'$$



(شکل ۳۳)

ب- اگر $-1 \leqslant a \leqslant 0$ چون به طریق بالا عمل کنیم نقطهٔ C بین O و A' واقع می‌شود کلیهٔ زوایای روبرو

به‌کمانهای مثلثاتی AN (شکل ۳۳) وتمام زوایای روبروبه کمانهای مثلثاتی AN' زوایای مطلوب می‌باشند و زاویه‌ای که انتهای کمان روبرو به آن در ربع دوم قرار داشته وانـدازهٔ آن بین $\frac{\pi}{۲}$ و π رادیان است زاویهٔ اصلی نامیده می‌شود واگر این زاویه را برابر φ فرض کنیم خواهیم داشت:

$$\frac{\pi}{۲}\leqslant \varphi = Arccos a \leqslant \pi$$

مثلاً اگر: $a=-\frac{۱}{۲}$ باشد مقصود از $Arccos(-\frac{۱}{۲})$ تنها زاویه $\frac{۲\pi}{۳}$ است وهمچنین:

$$Arccos(-۱)=\pi$$

مثال ۲ - مطلوب است تعیین تمام زوایایی که کسینوس آنها برابربا ۰/۷۸۸ — باشد. بااستفاده ازجدولهای مثلثاتی زاویه‌ای بین‌صفردرجه و °۹۰ که‌کسینوس آن برابر ۰/۷۸۸+ باشدتعیین‌می کنیم. این‌زاویه مکمل زاویه‌ای است که‌کسینوس‌آن ۰/۷۸۸ — است (رابطهٔ بین زوایای مکمل).

با مراجعه به جدول مقادیرنسبتهای مثلثاتی نتیجه می‌شود:

$$cos ۳۸^{\circ} = ۰/۷۸۸$$

$$cos(۱۸۰^{\circ}-۳۸^{\circ}) = cos ۱۴۲^{\circ} = -cos ۳۸^{\circ} = -۰/۷۸۸$$

بنابراین کوچکترین زاویه مثبت‌که کسینوس آن برابربا ۰/۷۸۸ — است زاویه °۱۴۲ می‌باشد.

اگر زاویهٔ مطلوب را x بنامیم می‌توان نوشت:

$$cos x = -۰/۷۸۸ = cos ۱۴۲^{\circ}$$

$$x = \pm ۱۴۲^{\circ} + k \times ۳۶۰^{\circ}$$

و

$$Arccos(-۰/۷۸۸) = ۱۴۲^{\circ}$$

حالتهای خاص - از $a=۰$ ، یعنی $cos x = ۰$ نتیجه می‌شودکه :

$x=\pm\frac{\pi}{۲}+۲k\pi$ و یا $x=k\pi+\frac{\pi}{۲}$ و $Arccos ۰ = \frac{\pi}{۲}$.

از $a=۱$ ، یعنی $cos x = ۱$ نتیجه می‌شودکه:

$x=۲k\pi$ و $Arccos ۱ = ۰$.

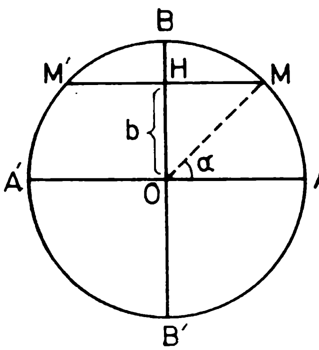
و از $a=-۱$ یعنی $cos x = -۱$ نتیجه می‌شودکه:

$x=\pm\pi+۲k\pi$ و یا $x=(۲k+۱)\pi$ و $Arccos(-۱)=\pi$.

مسئلهٔ ۲ - مطلوب است تعیین زاویه‌هایی‌که سینوس‌آنها برابر با عدد معلوم b می‌باشد

$(-1 \leqslant b \leqslant 1)$.

حل هندسی: الف ـ اگر $0 \leqslant b \leqslant 1$ باشد در دایرهٔ مثلثاتی روی محور سینوسها نقطهٔ H را روی نیم‌خط OB چنان اختیار می‌کنیم که $\overline{OH}=b$ باشد (شکل ۳۴) وسپس از نقطهٔ H خطی موازی با محور کسینوسها رسم می‌کنیم تا محیط دایره را در دو نقطهٔ M و M' که نسبت به محورسینوسها قرینهٔ یکدیگرند قطع کند کلیهٔ زوایای روبرو به‌کمانهای مثلثاتی AM وتمام زوایای روبرو به‌کمانهای مثلثاتی AM' زوایای مطلوب می‌باشند وسینوس همهٔ این زاویه‌ها برابر b است.



(شکل ۳۴)

بنابه قرارداد زاویهٔ روبروبه کمانی‌که انتهای آن در ربع اول واقع بوده واندازهٔ آن بین صفر و $\frac{\pi}{2}$ رادیان می‌باشد زاویهٔ اصلی نامیده می‌شود.

اگر اندازهٔ زاویهٔ اصلی برحسب رادیان برابر α باشد، پس $0 \leqslant \alpha \leqslant \frac{\pi}{2}$.

زاویهٔ اصلی را به صورت: $\alpha = Arcsinb$ نشان می‌دهند ومی‌خوانند α برابر است با آرك سینوس b.

مثلاً اگر $b=\frac{1}{2}$، مقصود از $Arcsin\frac{1}{2}$ تنها زاویه $\frac{\pi}{6}$ است.

اگر α اندازهٔ زاویه اصلی باشد، اندازهٔ تمام زاویه‌های روبروبه کمانهای AM را می‌توان به‌صورت $\alpha+2k\pi$ نوشت وچون اندازهٔ یکی از زاویه‌های روبرو به کمانهای AM' برابر $\pi-\alpha$ است بنابراین اندازهٔ تمام زوایای روبرو به‌کمانهای AM' را می‌توان به صورت $\pi-\alpha+2k\pi$ و یا $(2k+1)\pi-\alpha$ نوشت.

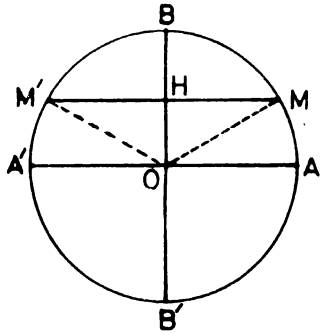
پس اندازهٔ زوایایی‌که سینوس آنها برابرمقدار معلوم b باشد از دو رابطه:

$$k\in Z \,,\quad \left|\begin{array}{l} x=\alpha+2k\pi \\ x=(2k+1)\pi-\alpha \end{array}\right.$$

به‌دست‌می‌آیند. از دو رابطهٔ اخیر معلوم می‌شود که مسئله جوابهای بی‌شمار داردکه با دانستن اندازهٔ یکی از آنها مانند α می‌توان اندازهٔ همهٔ آنها را به دست‌آورد. از آنچه گفته شد نتیجه می‌شودکه اگر دو زاویه x و α دارای سینوس برابر باشند یعنی $sinx = sin\alpha$ باشد یا مجموع آنها مضرب فردی از π و یا تفاضل آنها مضرب زوجی از π می‌باشد.

مثال ۱ ـ تمام زوایائی را تعیین کنیدکه سینوس‌آنها برابر با ۰/۴۵ باشد.

روی محور سینوسها (OB) نقطهٔ H را چنان اختیار می‌کنیم که $OH = ۰/۴۵$ باشد، از H خطی موازی با محور کسینوسها رسم می‌کنیم تا محیط دایره را در دو نقطهٔ M و M' قطع کند (شکل ۳۵).



(شکل ۳۵)

با استفاده از جدول مقادیر نسبتهای مثلثاتی $\angle AOM$ تقریباً برابر $۴۵'$, ۲۶° به دست می‌آید و بنابراین زاویهٔ AOM' تقریباً برابر است با:

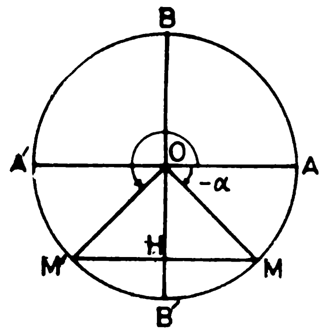
$$۱۸۰^\circ - (۲۶^\circ,۴۵') = ۱۵۳^\circ,۱۵'$$

از آنجا :

$x = k \times ۳۶۰^\circ + ۲۶^\circ , ۴۵'$ و یا $x = k \times ۳۶۰^\circ + ۱۵۳^\circ , ۱۵'$ به‌دست می‌آیدو زاویهٔ اصلی عبارت است از:

$$Arcsin(۰/۴۵) = ۲۶^\circ , ۴۵'$$

ب‌ـ اگر $-۱ \leqslant b \leqslant ۰$ باشد چون به‌طریق بالاعمل کنیم نقطهٔ H بین B' و O واقع می‌شود کـه کلیهٔ زوایای روبرو به‌کمانهای مثلثاتـی AM وتمام زوایای روبرو بـه کـمانهای مثلثاتـی AM' زاویـه‌هـای مطلوب مـی‌بـاشد (شکل ۳۶) وزاویه‌ای که‌انتهای کمان‌روبرو به آن‌در ربع‌چهارم قرار دارد وانـدازهٔ آن بین صفر و $\frac{-\pi}{۲}$ رادیـان مـی‌باشد



(شکل ۳۶)

زاویهٔ اصلی نامیده می‌شود مثلاً اگر $b = \frac{-\sqrt{۳}}{۲}$ باشدمقصود از $Arcsin(\frac{-\sqrt{۳}}{۲})$ تنها زاویهٔ $(\frac{-\pi}{۳})$ است‌وهمچنین $Arcsin(-۱) = \frac{-\pi}{۲}$.

اگر α اندازهٔ زاویه اصلی باشد، اندازهٔ تمام‌زوایای روبروبه‌کمان‌های AM به‌صورت $\alpha + ۲k\pi$ واندازه‌تمام‌زوایای‌روبروبه‌کمان‌های AM' به‌صورت:

$$۲k\pi + \pi - \alpha = (۲k + ۱)\pi - \alpha$$

خواهد بود.

مثال ۲ - مطلوب است تعیین تمام زوایائی که سینوس آنها برابر ۰/۶۸۲ — باشد.

با استفاده از جدول مقادیر تابعهای مثلثاتی زاویه‌ای بین صفر درجه و ۹۰° که سینوس آن برابربا $(۰/۶۸۲ +)$ باشد را تعیین‌می‌کنیم. این زاویه‌قرینهٔ زاویه‌ای است‌که سینوس‌آن $(۰/۶۸۲ -)$ است (رابطهٔ بین زوایای قرینه) با مراجعه به‌جدول معلوم می‌شود:

$$\sin ۴۳^\circ = ۰/۶۸۲$$

$$\sin(-۴۳^\circ) = -\sin ۴۳^\circ = -۰/۶۸۲$$

بنابراین $Arcsin(-۰/۶۸۲) = -۴۳^\circ$ و برای تعیین زوایای مطلوب می‌توان نوشت:

$$\sin x = -۰/۶۸۲ = \sin(-۴۳^\circ)$$

$$x = -۴۳^\circ + k \times ۳۶۰^\circ \qquad \text{و}$$

$$x = ۱۸۰^\circ + ۴۳^\circ + k \times ۳۶۰^\circ$$

که در آنها $k \in Z$.

حالتهای خاص - اگر $b = ۰$ یعنی $\sin x = ۰$ نتیجه می‌شود:

$x = ۲k\pi$ و یا $x = ۲k\pi + \pi$ و یا به‌طور کلی $x = k\pi$ و $Arcsin\, ۰ = ۰$.

اگر $b = ۱$ یعنی $\sin x = ۱$ نتیجه می‌شود:

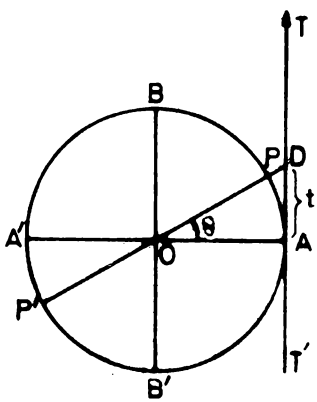
$x = ۲k\pi + \frac{\pi}{۲}$ و $Arcsin\, ۱ = \frac{\pi}{۲}$.

اگر $b = -۱$ یعنی $\sin x = -۱$ نتیجه می‌شود:

$x = ۲k\pi - \frac{\pi}{۲}$ و $Arcsin(-۱) = \frac{-\pi}{۲}$.

مسئلهٔ ۳- زوایائی را تعیین کنید که تانژانت آنها برابر عدد معلوم t می‌باشد

حل هندسی: الف فرض کنیم $t \geqslant ۰$ روی محور تانژانتها (AT) نقطهٔ D را چنان اختیار می‌کنیم که $\overline{AD} = t$ (شکل ۳۷) سپس از D به مرکز دایرهٔ مثلثاتی وصل می‌کنیم تا دایره را در دو نقطهٔ P و P' قطع کند کلیهٔ زوایای روبرو به کمانهای مثلثاتی AP و تمام زوایای روبرو به کمانهای مثلثاتی AP' زاویه‌های مطلوب می‌باشند و تانژانت همهٔ این زاویه‌ها برابر t است. اگر θ زاویه‌ای باشد که انتهای کمان آن در ربع اول بوده و $۰ \leqslant \theta < \frac{\pi}{۲}$ و $tg\, \theta = t$ دراین صورت θ را زاویه اصلی نامیده و می‌نویسیم:



(شکل ۳۷)

$$\theta = Arctg\, t$$

مثلاً مقصود از $Arctg\sqrt{۳}$ تنها زاویهٔ $\frac{\pi}{۳}$ است.

اگر θ اندازهٔ زاویه اصلی باشد اندازه تمام زوایای روبرو به کمانهای AP به صورت:

وچون اندازهٔ یکی از زوایای روبروبه کمانهای AP' برابـر است بـا $\theta+2k\pi$ ، $(k\in Z)$، پس تمام زوایای روبروبه کمانهای AP' بهصورت $(\theta+\pi)+2k\pi$ ویا $\theta+(2k+1)\pi$ نوشته‌می‌شود بنابراین اندازهٔ تمام زوایائی که تانژانت آنها برابر با مقدارمعلوم t باشند از دورابطهٔ

$$\begin{cases} x=\theta+2k\pi \\ x=\theta+(2k+1)\pi \end{cases}$$

به دست می‌آیند یعنی x برابر است با مجموع θ و مضرب زوجـی از π و همچنین x برابر است با مجموع θ و مضرب فردی از π پس می‌توان نتیجه گرفت که x برابراست با مجموع θ ومضربی از π یعنی:

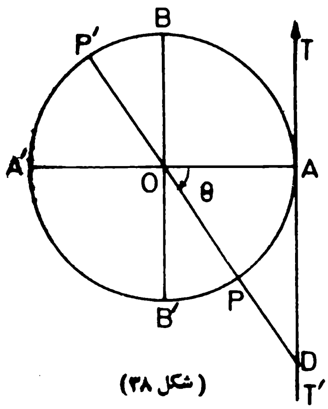
$$x=\theta+k\pi$$

از رابطهٔ اخیر معلوم می‌شود که مسئله جوابهای بی‌شمار دارد که با دانستن اندازهٔ یکی از آنها مانند θ می‌توان اندازهٔ همه آنها را به دست آورد.

از آنچه گفته شد و با تـوجه به رابطهٔ $x=\theta+k\pi$ و یا $x-\theta=k\pi$ می‌تـوان نتیجه گرفت که: **اگر دو زاویه x و θ دارای تانژانت‌برابر باشند تفاضل اندازه‌هـای آنها مضربـی است از π یعنی:**

$$tgx=tg\theta \Longrightarrow x-\theta=k\pi$$

ب ـ فرض کنیم $t\leqslant 0$ چون به طریق بالا عمل کنیم نقطهٔ D روی AT' واقع می‌شود (شکل ۳۸) اگـر از نقطهٔ D به مرکز دایره وصل کنیم تا محیط دایـره را در دو نقطهٔ P' و P قطع کند دراین حال زاویه اصلی زاویه‌ای است که انتهای کمان‌روبرو به‌آن‌درربع‌چهارم‌واقع بوده‌واندازهٔ آن بین صفر و $\frac{-\pi}{2}$ است یعنی $0\leqslant\theta<\frac{-\pi}{2}$.



(شکل ۳۸)

مثلاً مقصود از $Arctg(-\frac{\sqrt{3}}{3})$ تنهـا زاویـه $-\frac{\pi}{6}$ است وهمچنین $Arctg(-1)=-\frac{\pi}{4}$.

دراین حالت اگر θ اندازه زاویه اصلـی باشد اندازه تمام زوایائی که تانـژانت آنها برابر با t است از رابطهٔ $x=k\pi+\theta$ که درآن $k\in Z$ به دست می‌آید.

مثال - مطلوب است تعیین تمام زوایایی که تانژانت آنها برابر با ۰/۳۶۴ — باشد.

با استفاده از جدول مقادیر تابعهای مثلثاتی زاویه‌ای بین صفردرجه و °۹۰ که تانژانت آن برابر ۰/۳۶۴ + باشد را تعیین می‌کنیم. این زاویه قرینهٔ زاویـه‌ای است کـه تانژانت آن ۰/۳۶۴ — است (رابطهٔ بین زوایای قرینه) با مراجعه به جدول معلوم می‌شود:

$$tg20°=0/364$$

$tg(-۲۰^\circ)=-tg۲۰^\circ=-۰/۳۶۴$

بنا بر این $Arctg(-۰/۳۶۴)=-۲۰^\circ$ و برای تعیین زوایای مطلوب می‌توان نوشت:

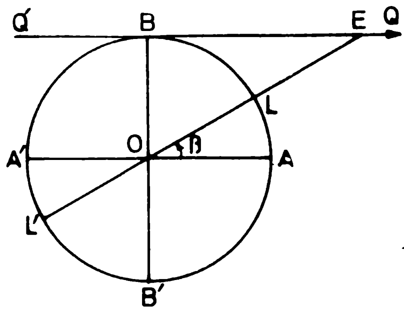
$tgx=-۰/۳۶۴=tg(-۲۰^\circ)$

در نتیجه

$$\boxed{x=-۲۰^\circ+k\times ۱۸۰^\circ}$$

مسئلهٔ ۴ - زوایایی را تعیین کنید که کتانژانت آنها برابر عدد معلوم q باشد.

حل هندسی: الف ــ فرض کنیم $q>۰$. روی محور کتانژانتها نقطهٔ E را چنان اختیار می کنیم کــه: $\overline{BE}=q$ (شکل ۳۹) از E به مرکــز دایره وصل کنیم تا دایـره را در دو نقطهٔ L و L' قطع کند کلیهٔ زوایای روبرو به کمانهای مثلثاتی AL وتمام زوایای روبرو به کمانهای مثلثاتی AL' زوایای مطلوب می‌باشند بنابه قرارداد اگر β زاویه روبرو بـه کمانی باشد که انتهای آن در ربع اول بوده و $۰<\beta\leqslant\frac{\pi}{۲}$ ، β را زاویهٔ اصلی می‌نامند. زاویه اصلـی β را به صورت زیرنشان می‌دهند.

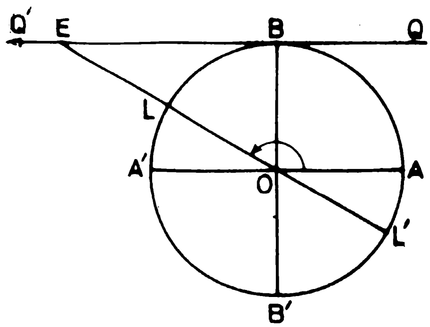


(شکل ۳۹)

$\beta=Arccotgq$

مثلاً اگر $q=\sqrt{۳}$ باشد مقصود از $Arccotg\sqrt{۳}$ تنها زاویــهٔ $\frac{\pi}{۶}$ است. اگر به همــان طریق مسئلهٔ قبــل در مورد این مسئله نیز عمل کنیم معلوم می‌شود کـه اگر دو زاویه x و β دارای یك کتانژانت باشند تفاضل آنها مضربی است از π یعنی اگر $cotgx=q=cotg\beta$ ، پس

$$\boxed{x=\beta+k\pi}$$



(شکل ۴۰)

ب ــ فرض کنیم $q<۰$ چون به طریق بالا عمل کنیم نقطهٔ E روی BQ' واقـع شده و اگــر از E به مرکز دایره وصل کنیم تا دایره را در دو نقطهٔ L و L' قطع کند (شکل ۴۰) کلیهٔ زوایای روبرو به کمانهای مثلثاتی AL و تمام زوایـای روبرو به کمانهای مثلثاتی AL' زوایای مطلوب

می‌باشند و دراین‌حال زاویه اصلی β زاویه‌ای است که انتهای کمان روبروبه آن در ربع دوم بوده و $\frac{\pi}{2} < \beta < \pi$. اگر β زاویه اصلی باشد، می‌نویسیم $\beta = Arctgq$.

مثلاً اگر $q = -1$ ، مقصود از $Arccotg(-1)$ تنها $\frac{3\pi}{4}$ است.

تبصرهٔ ۱- از آنچه گفته شد می‌توان نتیجه گرفت که :

$$-1 \leqslant a \leqslant 1 \qquad 0 \leqslant Arccos a \leqslant \pi$$

$$-1 \leqslant b \leqslant 1 \qquad -\frac{\pi}{2} \leqslant Arcsin b \leqslant \frac{\pi}{2}$$

$$t \in R \qquad -\frac{\pi}{2} < Arctg t < \frac{\pi}{2}$$

$$q \in R \qquad 0 < Arccotg q < \pi$$

پس مقدار زاویه $Arccos a$ درفاصلهٔ بستهٔ[1] $[\pi$ و $0]$ و $Arcsin b$ درفاصلهٔ بستهٔ $\left[-\frac{\pi}{2}\right.$ و $\left.\frac{\pi}{2}\right]$ و $Arctg t$ در فاصلهٔ باز[2] $(\frac{\pi}{2}$ و $-\frac{\pi}{2})$ و $Arccotg q$ در فاصلهٔ باز $(\pi$ و $0)$ واقعند .

(۵-۵)- حل چند مثال

مثال ۱

الف - $Arccos\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\pi}{4}$ و $Arcsin\frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}$ و $Arctg\sqrt{3} = \frac{\pi}{3}$ و

$$Arc\ cotg\sqrt{3} = \frac{\pi}{6}$$

ب - $Arc\ sin(-\frac{\sqrt{3}}{2}) = -\frac{\pi}{3}$ و $Arccos(-\frac{1}{2}) = \frac{2\pi}{3}$ و

$$Arctg(-1) = -\frac{\pi}{4}$$

۱- منظور از فاصله بسته $\left[-\frac{\pi}{2}\right.$ و $\left.\frac{\pi}{2}\right]$ مجموعهٔ $\left\{x \mid -\frac{\pi}{2} \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}\right\}$ است.

۲- منظور از فاصله باز $(\frac{\pi}{2}$ و $-\frac{\pi}{2})$ مجموعهٔ $\left\{x \mid -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}\right\}$ است.

و $\quad Arc\,cotg(-1) = \frac{3\pi}{4}$

پ ـ $\quad Arc\sin(-\frac{\sqrt{2}}{2}) + Arc\cos(-1) = -\frac{\pi}{4} + \pi = \frac{3\pi}{4}$

ت ـ $\quad Arc\,tg(\frac{\sqrt{3}}{3}) + Arc\,cotg(-1) = \frac{\pi}{6} + \frac{3\pi}{4} = \frac{11\pi}{12}$

مثال ۲- مطلوب است محاسبهٔ هریك ار عبارتهای زیر:

$$\sin\left[\ Arc\cos(-\frac{3}{5})\right] \text{ و } \cos\left[\ Arc\sin(-\frac{8}{17})\right]$$

حل ـ الف ـ مقصود محاسبهٔ $\sin\alpha$ می‌باشد. باتوجه‌به‌آنکه انتهای کمان روبرو به زاویه α در ربع دوم قراردارد خواهیم داشت:

$$\sin\alpha = \sqrt{1-\cos^2\alpha}$$

و بنابراین:

$$\sin\alpha = \sqrt{1-\frac{9}{25}} = \frac{4}{5}$$

پس $\quad \sin\left[\ Arc\cos(-\frac{3}{5})\right] = \frac{4}{5}$

ب ـ مقصود محاسبهٔ $\cos\beta$ است. با توجه به آن‌که انتهای کمان روبروبه زاویه β در ربع چهارم است‌خواهیم داشت: $\cos\beta = \sqrt{1-\sin^2\beta}$ بنابراین:

$$\cos\beta = \sqrt{1-\frac{64}{289}} = \frac{15}{17}$$

پس $\quad \cos\left[\ Arc\sin(-\frac{8}{17})\right] = \frac{15}{17}$

مثال ۳- ثابت‌کنید به ازای هرعدد حقیقی m تساوی زیر برقرار است:

$$Arc\sin\frac{1-m^2}{1+m^2} + Arc\sin\frac{2m}{1+m^2} = \frac{\pi}{2} \qquad 1 \geqslant m \geqslant 0$$

حل- اگرفرض کنیم: $Arc\sin\frac{2m}{1+m^2} = \alpha$ و $Arc\sin\frac{1-m^2}{1+m^2} = \beta$، خواهیم داشت:

$$\sin\alpha=\frac{2m}{1+m^2}\Longrightarrow\cos\alpha=\frac{1-m^2}{1+m^2}$$

$$\sin\beta=\frac{1-m^2}{1+m^2}\Longrightarrow\sin\beta=\cos\alpha$$

در نتیجه

می‌دانیم که هرگاه سینوس زاویهٔ حاده‌ای برابر با کسینوس زاویهٔ حاده دیگر باشد آن دو زاویه متمم یکدیگرند.

پس $\alpha+\beta=\frac{\pi}{2}$ یعنی: $Arc\sin\frac{1-m^2}{1+m^2}+Arc\sin\frac{2m}{1+m^2}=\frac{\pi}{2}$ است.

مثال ۴- درستی رابطهٔ زیر را بررسی کنید :

$$Arctgm+Acrcotgm=\frac{\pi}{2}$$

حل - فرض می‌کنیم $Arctgm=\alpha$ و $Arccotgm=\beta$ است پس $tg\alpha=m$ و $cotg\beta=m$ است چون کتانژانت β با تانژانت α برابر است پس $\alpha+\beta=\frac{\pi}{2}$ می‌باشد یعنی $Arctgm+Arccotgm=\frac{\pi}{2}$ است.

تمرین

۱- آیا تانژانت یك زاویهٔ حاده همواره از سینوس آن بیشتر است؟

۲- آیا کتانژانت یك زاویهٔ حاده همواره از کسینوس آن بیشتر است؟

۳- آیا اندازهٔ یك زاویه (برحسب رادیان) همواره از سینوس آن بیشتر است؟

۴- اگر $0<\alpha<\frac{\pi}{4}$ باشد آیا $\sin\alpha$ از $\cos\alpha$ بزرگتر است؟

۵- اگر $\frac{\pi}{4}<\alpha<\frac{\pi}{2}$ باشد آیا $tg\alpha$ از $cotg\alpha$ بزرگتر است؟

۶- مقدار هریك از نسبتهای مثلثاتی زیر را از روی جدول به دست آورید:

(الف) $\sin 17^\circ$ (ب) $\cos 22^\circ$ (پ) $tg 63^\circ$ (ت) $cotg 41^\circ$

۷- درستی تساویهای زیر را از روی جدول بررسی کنید :

(الف) $\sin 54^\circ=\cos 36^\circ$ (ب) $\cos 72^\circ=\sin 18^\circ$ (پ) $tg 14^\circ=cotg 76^\circ$

(ت) $cotg 17^\circ=tg 73^\circ$ (ث) $\sin 2^\circ=\cos 88^\circ$ (ج) $\cos 27^\circ=\sin 63^\circ$

۸ــ مقدار هریك از نسبتهای مثلثاتی زیررا به‌کمك جدول تعیین کنید:

(الف) $\cos ۴۲^\circ , ۵۰'$ (ب) $\sin ۲۳^\circ , ۲۴'$ (پ) $tg ۲۷^\circ , ۵۴'$

(ت) $cotg ۳۶^\circ , ۳۶'$

۹ــ به‌کمك جدول مقادیر نسبتهای مثلثاتی، زاویه‌هائی را تعیین کنیدکه یکی از مقادیر نسبتهای مثلثاتی آنها داده شده‌اند.

(الف) $\sin\alpha = ۰/۸۷۴۶$ (ب) $\cos\beta = ۰/۰۱۷۵$ (پ) $tg\gamma = ۱/۲۳۴۹$

(ت) $\sin x = ۰/۲۵۴۲$ (ث) $\cos Y = ۰/۷۴۲۴$ (ج) $cotg t = ۲/۵۴۷۵$

۱۰ــ به‌کمك جدول $\sin ۱۲۰^\circ$ ، $\cos ۶۳^\circ$ ، $tg ۴۸^\circ$ و $cotg ۲۵^\circ$ را حساب کنید.

۱۱ــ مقادیـر نسبتهای مثلثاتی را برای هریك از زوایای زیر به دست آورید (به‌کمك جدول).

(الف) -۶۳۰° (ب) $۹۱۴^\circ , ۲۴'$ (پ) $(۱۲۵۰/۲۵)_g$

(ت) $(۲۲۲۴/۷۲۵)^g$ (ث) $\frac{۳۶}{۱۳}\pi$

۱۲ــ زاویه‌هایی را که یکی از مقادیـر نسبتهای مثلثاتی آنها داده شده است بـه دست آورید (به‌کمك جدول).

(الف) $\sin\alpha = ۰/۳۲۵۶$ (ب) $\sin\beta = -۰/۶۱۵۷$ (پ) $\cos x = ۰/۹۳۲$

(ت) $\cos a = -۰/۷۷۸$ (ث) $tg b = ۰/۷$ (ج) $tg c = -۱/۳۳$

(چ) $cotg d = ۱/۸$ (ح) $cotg d = -۰/۳۶۴$

۱۳ــ نسبتهای مثلثاتی زاویه‌های $x = ۱۵۰۰^\circ$ و $y = -۲۸۵۰^{gr}$ را حساب نموده و سپس نسبتهای مثلثاتی همنام دو زاویهٔ x و y را با یکدیگرمقایسه کنید.

۱۴ــ درصورتی که $tg\alpha = \frac{۱۵}{۸}$ و انتهای کمان روبروبه زاویه α درنـاحیهٔ سوم باشد مقدار عددی عبارت زیررا به دست آورید.

$$tg^۲(\alpha - ۷۲۰^\circ)\cdot \sin^۲(\alpha - ۶۳۰^\circ) + \cos^۲(۹۰۰^\circ - \alpha) - ۲\sin(۵۴۰^\circ - \alpha)\sin(\alpha - ۲۷۰^\circ)$$

۱۵ــ مقدار عددی عبارتهای زیر را حساب کنید.

(الف) $\cos(-\frac{۱۷۹\pi}{۶}) + \sin(-\frac{۱۷۹\pi}{۶}) + tg(-\frac{۱۲۷\pi}{۶})$

ب) $\dfrac{\sin(\pi+\alpha)}{\sin(\frac{3\pi}{2}+\alpha)}-\dfrac{tg(\frac{3\pi}{2}+\alpha)}{cotg(3\pi-\alpha)}+tg(5\pi-\alpha)+\cos 8\pi$

۱۶ــ در صورتی که $x=k\pi+\frac{\pi}{6}$ و $k\in Z$ باشد اولا ثابت کنید از عبارت : $y=tg(\pi\sin x)$ برای y مقدارمعینی به‌دست نمی‌آید. ثانیاً اگر $y=1$ و $0<x<2\pi$ ، 0 مقدار $\sin x$ را حساب کنید.

۱۷ــ اگر $0<\varphi<\frac{\pi}{2}$ ، $a>1$ ، $\sin\varphi=\frac{1}{a-1}$ و $cotg\varphi=\sqrt{3a}$ باشد مطلوب است مقدار عددی عبارتهای $\sin(\frac{3\pi}{2}-\varphi)$ و $\cos(\varphi-5\pi)$.

۱۸ــ اگر $0<\alpha<\pi$ بوده و داشته باشیم : $\sin\alpha=2tg\beta$ ، $\beta-a=\frac{\pi}{2}$ ، $\cos\alpha$ و $\cos\beta$ را حساب کنید.

۱۹ــ حدود m را چنان تعیین کنید که تساویهای زیر وقتی که x در فاصله‌های داده شده قرار دارند درست باشد

(الف) $\sin x=\dfrac{2m}{m+2}$ و $30^\circ<x<150^\circ$

(ب) $tgx=\dfrac{m^2-1}{m-3}$ و $1150^{gr}<x<1250^{gr}$

۲۰ــ عبارتهای زیر را تکمیل کنید:

$$Arc\sin\frac{\sqrt{3}}{2}=\alpha\Longrightarrow\alpha=\cdots$$

$$Arc\cos(1)=\beta\Longrightarrow\beta=\cdots$$

$$Arctg\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)=\gamma\Longrightarrow\gamma=\cdots$$

۲۱ــ عبارتهای زیر را تکمیل کنید :

$$x=Arcsin\left(\frac{-2}{7}\right)\Longrightarrow\frac{-2}{7}=\cdots$$

$$y=Arccos\left(\frac{-3}{8}\right)\Longrightarrow -\frac{3}{8}=\cdots$$

$$z=Arctg(-3)\Longrightarrow -3=\cdots$$

(۵-۶)- معادلهٔ مثلثاتی

تساوی دوعبارت را که شامل مقادیر نسبتهای مثلثاتی یك زاویه بوده و برابری دوطرف تساوی در ازای بعضی از مقدارهای این زاویه برقرارشود معادلهٔ مثلثاتی می‌نامند، مانند معادلهٔ: $۲\sin x = \sqrt{۳}$ که در ازای :

$$x = \frac{\pi}{۳} \text{ و } \frac{۲\pi}{۳} \text{ و } \frac{۷\pi}{۳} \text{ و } \frac{۸\pi}{۳} \text{ و} \dots$$

دو طرف تساوی برابر می‌شود.

(۵-۷)- ریشه یا جواب معادله

ریشه یاجواب معادله، مقدارهایی اززاویه مجهول است که درستی تساوی در ازای آنها برقرار می‌شود ومقصود ازحل معادلهٔ مثلثاتی پیدا کردن کلیهٔ جوابهای آن معادله است مثلاً در معادلهٔ $۲\sin x - \sqrt{۳} = ۰$ جوابها عبارتند از:

$$x = ۲k\pi + \frac{۲\pi}{۳} \quad \text{ویا} \quad x = ۲k\pi + \frac{\pi}{۳}$$

(۵-۸)- حل معادله‌های مثلثاتی

برای حل یك معادلهٔ مثلثاتی، به‌کمك رابطه‌های مثلثاتی و دستورهای جبری مرتباً آن را به معادله‌های ساده‌تری تبدیل می‌کنیم تا به یکی از صورتهای زیر درآید:

۱- $\sin x = a$

در صورتی که $-۱ \leqslant a \leqslant ۱$ می‌توان نوشت $\sin\alpha = a$ پس : $\sin x = \sin\alpha$ و چنان که قبلاً دیدید:

$$x = ۲k\pi + \alpha \text{ و } x = ۲k\pi + \pi - \alpha$$

اگر $a > ۱$ و یا $a < -۱$ ، معادله جواب ندارد.

۲- $\cos x = b$ با شرط $-۱ \leqslant b \leqslant ۱$ می‌توان نوشت:

$\cos\beta = b$ پس $\cos x = \cos\beta$ از آنجا خواهیم داشت :

$$x = ۲k\pi - \beta \quad \text{و} \quad x = ۲k\pi + \beta$$

اگر $b > ۱$ یا $b < -۱$ ، معادله جواب‌ندارد.

۳- $tg x = c$

زاویه γ را طوری پیدا می‌کنیم که $tg\gamma = c$. پس $tg x = tg\gamma$

و از آنجا $x = k\pi + \gamma$

۴- $cotg x = d$

زاویه θ را طوری پیدا می‌کنیم که $cotg\theta = d$. پس $cotg\theta = cotg x$

و از آنجا $x = k\pi + \theta$

به جوابهایی که به صورت بالا نوشته شده باشد، جوابهای کلی معادله مـی گـویند. ممکن است در معادله جوابهایی که در فـاصلهٔ مشخص قرار داشته باشد خواسته شود، در آن صورت به k عددهای درست نسبت می‌دهیم تا جوابهای مورد نظر بدست آید.

(۵-۹)- معادله‌های سادهٔ مثلثاتی

معادله‌های مثلثاتی دارای نوعهای مختلف است :

الف - معادله شامل یکی از مقادیر نسبتهای مثلثاتـی زاویه مجهول می‌باشد - ابتـدا این نوع معادله را برحسب نسبت مثلثاتی که درمعادله موجود است حل کرده وپس از تعیین آن مقدارنسبت مثلثاتی زوایائی را که جواب معادله می‌باشند به دست می‌آورند.

مثال ۱- معادلهٔ $۲cos x - \sqrt{۳} = ۰$ را حل کرده جوابهای کلی و جوابهایی که در فاصلهٔ صفر و ۲π رادیان واقعند پیدا کنید.

حل - از حل معادله برحسب $cos x$ خواهیم داشت : $cos x = \frac{\sqrt{۳}}{۲}$ چنان کـه مـی‌دانید: $arccos\frac{\sqrt{۳}}{۲} = \frac{\pi}{۶}$ است، بنابراین $cos x = cos\frac{\pi}{۶}$. از آنجا جـوابـهای کلی معادلـه عبارتند از:

$$x = ۲k\pi + \frac{\pi}{۶} \quad و \quad x = ۲k\pi - \frac{\pi}{۶}$$

و جوابهایی که در فاصلهٔ صفر و ۲π واقعند عبارتند از:

$$k = ۰ \Longrightarrow x = \frac{\pi}{۶} \quad و \quad k = ۱ \Longrightarrow x = \frac{۱۱\pi}{۶}$$

مثال ۲- معادلهٔ $۸sin^۲x - ۶sin x + ۱ = ۰$ را حل کرده جوابهای کلی وجوابهایی را که در فاصلهٔ صفر و ۳۶۰° واقعند پیدا کنید.

حل - اگر قرار دهیم $sin x = y$، خواهیم داشت $۸y^۲ - ۶y + ۱ = ۰$، ازحل این معادله بدست می‌آوریم:

$$y = sin x = \frac{۳ \pm \sqrt{۹ - ۸}}{۸} = \frac{۳ \pm ۱}{۸}$$

از آنجا دومعادلهٔ سادهٔ مثلثاتی $sin x = \frac{۱}{۲}$ و $sin x = \frac{۱}{۴}$ به دست می‌آید.

الف ــ $\sin x = \frac{1}{2} = \sin 30^\circ$ پس :

$$\left\{\begin{array}{l} x = k \times 360^\circ + 30^\circ \\ x = k \times 360^\circ + 150^\circ \end{array}\right.$$ جوابهای کلی

و جوابهای واقع بین صفر و 360° عبارتند از 30° و 150°

ب ــ $\alpha = Arc\sin\frac{1}{4}$ و $\sin x = \frac{1}{4} = \sin\alpha$ از آنجا :

$$x = k \times 360^\circ + \alpha^\circ \quad \text{یا} \quad x = k \cdot 360^\circ + Arc\sin\frac{1}{4}$$

$$x = k \times 360^\circ + 180^\circ - \alpha^\circ \quad \text{یا} \quad x = k \cdot 360^\circ + 180^\circ - Arc\sin\frac{1}{4}$$

زاویهٔ α را می‌توان از روی جدول مقادیر نسبتهای مثلثاتی به‌دست آورد:

$$\alpha^\circ = Arc\sin\frac{1}{4} = 14^\circ \text{ و } 28' \text{ و } 39''$$

وجوابهای واقع بین صفر و ۳۶۰ عبارتند از ($39''$ و $28'$ و 14°) و ($21''$ و $31'$ و 165°)

مثال ۳ـ معادلهٔ $2\cos^2 x + \cos x - 3 = 0$ را حل کنید.

حل ــ اگر قرار دهیم $y = \cos x$ ، خواهیم داشت $2y^2 + y - 3 = 0$ از حل این معادله نتیجه می‌شود که

$$y = \cos x = \frac{-1 \pm \sqrt{1+24}}{4} = \frac{-1 \pm 5}{4} \Longrightarrow \cos x = 1 \text{ و } \cos x = \frac{-3}{2}$$

$x = 2k\pi \Longleftarrow \cos x = 1$ و $\cos x = \frac{-3}{2}$ قابل قبول نمی‌باشد (چرا ؟)

مثال ۴ـ معادلهٔ مثلثاتی زیر داده شده است :

$$(m-2)tg^2 x + (2m-1)tg x - 2 = 0$$

اولاً تعیین کنید در ازای چه مقدارهایی از m معادله دارای جواب است. ثانیاً به ازای $m = -3$ جوابهای معادله را به دست آورید.

حل ــ اولاً $tg x$ می‌تواند هر عدد حقیقی را اختیار کند، بنابراین شرط این که معادله دارای جواب باشد این است که $\Delta \geqslant 0$ اما

$$\Delta = (2m-1)^2 + 8(m-2) \geqslant 0 \Longrightarrow 4m^2 + 4m - 15 \geqslant 0 \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} m \geqslant \frac{3}{2} \\ m \leqslant -\frac{5}{2} \end{array}\right.$$

ثانیاً در ازای $m = -3$ خواهیم داشت :

$$-5tg^2x - 7tgx - 2 = 0 \Longrightarrow 5tg^2x + 7tgx + 2 = 0$$

از آنجا با قرار دادن $y = tgx$ و حل معادله $5y^2 + 7y + 2 = 0$ ، بدست می‌آوریم :

$$tgx = \frac{-7 \pm \sqrt{49 - 40}}{10} = \frac{-7 \pm 3}{10} \Longrightarrow tgx = -1 \text{ و } tgx = \frac{-2}{5}$$

و

$$tgx = -1 = -tg\frac{\pi}{4} = tg\left(-\frac{\pi}{4}\right) \Longrightarrow x = k\pi - \frac{\pi}{4}$$

پس

$$tgx = \frac{-2}{5} = -tg\alpha = tg(-\alpha) \text{ و } \alpha = Arctg\frac{2}{5}$$

$$x = k\pi - \alpha \text{ یا } x = k\pi - Arctg\frac{2}{5}$$

بامراجعه به جدول مقادیر نسبتهای مثلثاتی، α برحسب‌درجه تقریباً برابر $21°48'5''$ به دست می‌آید.

ب ـ معادله مثلثاتـــی شامل مقادیر چند نسبت مثلثاتی زاویهٔ مجهول می‌باشد ـ مانند معادله‌های $2sinx\,cosx + cosx = 0$ و $cos^2y - sin\,y = 1$ و $tgx + 2cotgx = 3$

دربعضی از معادله‌ها، ممکن است با نقل تمام جمله‌ها به یك طرف تساوی، عبارت معادله را به‌کمك تجزیه به حاصل‌ضرب عاملها، به دو یا چند معادلهٔ یك مجهولی ساده تبدیل کرده و سپس از خاصیت صفر بودن حاصل ضرب چند عامل برای حل معادله استفاده‌کرد.

مثال ۱ـ معادلهٔ مثلثاتی $cos^2x + sinx - 1 = 0$ را حل کرده، جوابهای کلی وجوابهای بین صفر و 2π را بنویسید. $(0 \leqslant x \leqslant 2\pi)$

حل ـ در این معادله بجای cos^2x عبارت $1 - sin^2x$ را قرار می‌دهیم و مانند حالت (الف) معادله را حل می‌کنیم.

$$1 - sin^2x + sinx - 1 = 0$$

$$sinx(sinx - 1) = 0 \Longrightarrow sinx = 0 \text{ یا } sinx = 1 \Longrightarrow x = k\pi \text{ یا}$$

$$x = 2k\pi + \frac{\pi}{2}$$

جوابهای $0 \leqslant x \leqslant 2\pi$ عبارتند از :

$$x = 0 \text{ و } \pi \text{ و } 2\pi \text{ و } \frac{\pi}{2}$$

مثال۲ـ معادلهٔ مثلثاتی $tgx - 2cotgx = 1$ را حل‌کنید .

حل - ابتدا این معادله را برحسب tgx و یا $cotgx$ نوشته و سپس مانند حالت (الف) معادله را حل می‌کنیم. با توجه به این که $cotgx = \frac{1}{tgx}$ ، خواهیم داشت :

$$tgx - ۲ \times \frac{۱}{tgx} = ۱ \Longrightarrow tg^۲x - tgx - ۲ = ۰$$

و از آنجا

$$tgx = \frac{۱ \pm \sqrt{۱+۸}}{۲} = \frac{۱ \pm ۳}{۲} \Longrightarrow tgx = -۱ \text{ و } tgx = ۲$$

$$tgx = -۱ = tg\left(-\frac{\pi}{۴}\right) \Longrightarrow x = k\pi - \frac{\pi}{۴}$$

$$tgx = ۲ = tg\alpha \text{ و } \alpha = Arctg۲ \Longrightarrow x = k\pi + \alpha \text{ یا } x = k\pi + Arctg۲$$

با مراجعه به‌جدول مقادیر نسبتهای مثلثاتی، α برحسب درجه تقریباً $۶''$ و $۲۶'$ و ۶۳° و برحسب رادیان تقریباً برابر ۱/۱۰۷ رادیان به دست می‌آید.

مثال۳- معادلهٔ مثلثاتی $\sin x + \cos x + \sin x \cos x + ۱ = ۰$ را حل کنید:

این معادله را می‌توان چنین نوشت:

$$\sin x(۱ + \cos x) + \cos x + ۱ = ۰ \Longrightarrow (۱ + \sin x)(۱ + \cos x) = ۰$$

$$۱ + \cos x = ۰ \Longrightarrow \cos x = -۱ = \cos\pi \Longrightarrow x = ۲k\pi + \pi$$

$$۱ + \sin x = ۰ \Longrightarrow \sin x = -۱ = \sin\left(-\frac{\pi}{۲}\right) \Longrightarrow x = ۲k\pi - \frac{\pi}{۲}$$

تمرین

معادله‌های زیر را حل کرده، جوابهای کلی و جوابهای واقع بین صفر و ۲π آنها را به دست آورید :

۱- $۲\sin x - \sqrt{۳} = ۰$

۲- $۲\cos x - \sqrt{۲} = ۰$

۳- $۲\sin x + ۱ = ۰$

۴- $۲\cos x + \sqrt{۳} = ۰$

۵- $\cos ۴x = \cos x$

$$tg x = ۳ cotg x$$ -۶

$$tg^۲ x - ۳\sqrt{۳} = ۰$$ -۷

$$\sin ۲x = \cos(\frac{\pi}{۲} - x)$$ -۸

$$۲\sin^۲ x = ۳\cos x$$ -۹

$$\sin(x - \frac{۲\pi}{۳}) = \cos ۲x$$ -۱۰

$$tg(x + \frac{\pi}{۷}) = cotg\frac{۲\pi}{۷}$$ -۱۱

$$۲\cos^۲ x = \sin x - ۱$$ -۱۲

$$۲\cos^۳ x - \cos x = ۰$$ -۱۳

$$\sin^۲(x - \frac{\pi}{۸}) + ۲\cos(\frac{۵\pi}{۸} - x) = ۳$$ -۱۴

$$۲\sin^۲(x - \frac{\pi}{۴}) + ۳\sin(x + \frac{\pi}{۴}) - ۳ = ۰$$ -۱۵

$$\sin x + \cos x = ۱ + ۲\sin x\cos x$$ -۱۶

$$tg(۱ + \frac{x}{۲})tg(۱ - \frac{x}{۳}) = ۱$$ -۱۷

فصل ششم

محاسبهٔ نسبتهای مثلثاتی زوایای مرکب

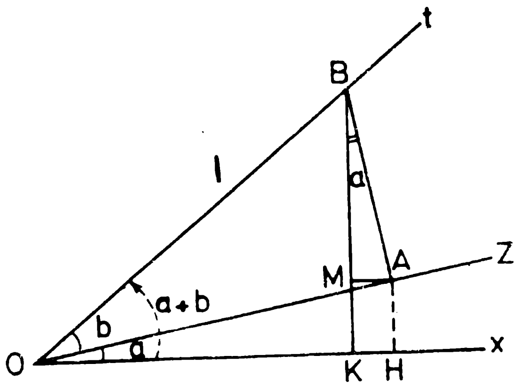
اغلب احتیاج داریم که از نسبتهای مثلثاتی مجموع یا تفاضل دو زاویه استفاده کنیم. هرگاه a و b دو زاویهٔ دلخواه باشند، آنگاه هریك از زوایای $(a+b)$ و $(a-b)$ موسوم به زوایای مرکب هستند وبیان نسبتهای مثلثاتی آنها برحسب نسبتهای مثلثاتی a و b مفید می‌باشند.

باید توجه داشت که $\sin(a+b)$ درحالت کلی مخالف با $\sin a+\sin b$ می‌باشد. در حقیقت این مطلب را می‌توان بسادگی با انتخاب مقادیری برای $\sin a$ و $\sin b$ و $\sin(a+b)$ به‌ازای زوایای خاصی برای a و b تحقیق نمود.

(۶ـ۱)ـ محاسبهٔ نسبتهای مثلثاتی مجموع دو زاویه

مقادیر نسبتهای مثلثاتی زاویه‌های a و b معلومند می‌خواهیم مقادیر نسبتهای مثلثاتی زاویه $a+b$ را حساب کنیم.

الف ـ محاسبه $\sin(a+b)$: زاویهٔ xOz را مساوی a و zOt را مساوی b جدا کرده و آنها را طوری‌پهلوی هم قرار می‌دهیم که دو زاویهٔ مجاور را تشکیل دهند، بر روی Ot پاره خط OB را برابر با واحد جدا کرده و از B عمود BA را بر Oz فرود می‌آوریم (A پای عمود)، از A عمود AH را بر Ox رسم می‌کنیم با توجه به شکل ۴۱ می‌توان نوشت :



(شکل ۴۱)

$$\sin b=\overline{AB} \quad \text{و} \quad \cos b=\overline{OA} \quad \text{و} \quad \sin a=\frac{\overline{HA}}{\overline{OA}}=\frac{\overline{HA}}{\cos b} \quad \text{و}$$

$$\cos a=\frac{\overline{OH}}{\overline{OA}}=\frac{\overline{OH}}{\cos b}$$

$$\sin(a+b)=\overline{KB} \quad \text{و} \quad \cos(a+b)=\overline{OK}$$

از نقطهٔ A عمود AM را بر KB فرود می‌آوریم، چهار ضلعی $KHAM$ مستطیل است (چرا؟) در نتیجه $KM=HA$ و $MA=KH$.

$\angle MBA$ برابر a می‌باشد (چرا ؟) و در مثلث قائم‌الزاویهٔ BMA می‌توان نوشت:

$$\cos(\angle MBA)=\cos a=\frac{\overline{MB}}{\overline{AB}}=\frac{\overline{MB}}{\sin b} \quad \text{و}$$

$$\sin(\angle MBA)=\sin a=\frac{\overline{MA}}{\overline{AB}}=\frac{\overline{MA}}{\sin b}$$

حال اگر در تساوی $\overline{KB}=\overline{KM}+\overline{MB}$ به جای هر یك از مقدارهای $\overline{KB}$ و $\overline{KM}$ و $\overline{MB}$ مقدارهای مساوی با آنها را قرار دهیم نتیجه می‌شود :

$$\boxed{\sin(a+b)=\sin a\cdot\cos b+\cos a\cdot\sin b} \quad (I)$$

ب- محاسبهٔ $\cos(a+b)$: به همین ترتیب اگـر در تساوی $\overline{OK}=\overline{OH}-\overline{KH}$ به‌جای هر یك از مقدارهای OK و OH و KH مقدارهای مساوی با آنها قرار دهیم نتیجه می‌شود:

$$\boxed{\cos(a+b)=\cos a\cdot\cos b-\sin a\cdot\sin b} \quad (II)$$

پ- محاسبهٔ $tg(a+b)$: از تقسیم دو طرف اتحاد $\sin(a+b)$ بـر $\cos(a+b)$ نتیجه می‌شود:

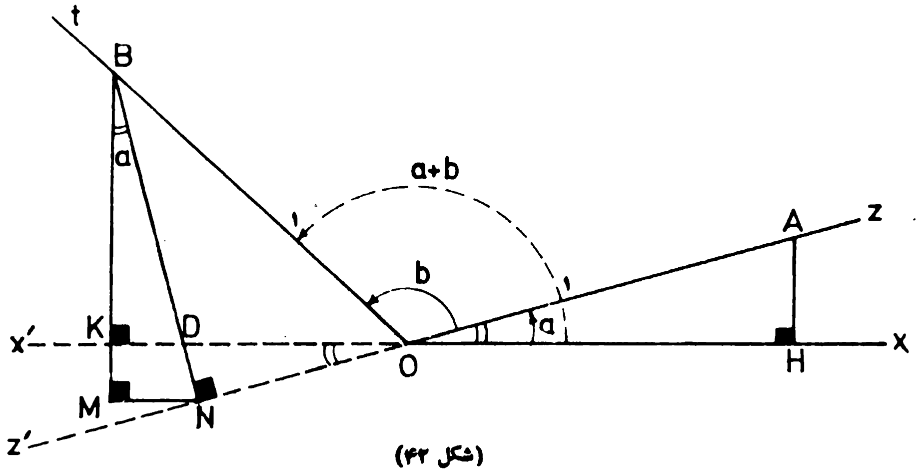
$$tg(a+b)=\frac{\sin(a+b)}{\cos(a+b)}=\frac{\sin a\cdot\cos b+\cos a\cdot\sin b}{\cos a\cdot\cos b-\sin a\cdot\sin b}$$

تذکر - درحالتی که مجموع دو زاویه حاده نباشد ویایکی از دو زاویهٔ a و b ویا هردو آنها حاده نباشند محاسبهٔ نسبتهای مثلثاتی $a+b$ از همین راه میسرمی‌باشد مثلاً اگر زاویهٔ a حاده و b زاویهٔ منفرجه باشد با توجه به شکل۴۲ می‌توان نوشت:

$$\sin(\angle xOB)=\sin(۱۸۰^\circ-\angle BOx')=\sin(\angle BOx')$$

یا

$$\sin(a+b)=\sin(\angle BOx')=\overline{KB}$$



(شکل ۴۲)

اما $\overline{KB}=\overline{MB}-\overline{MK}$ ، برای محاسبهٔ $\overline{MB}$ و $\overline{MK}$ می‌توان نوشت :

در مثلث قائم‌الزاویهٔ BMN

$$\cos a=\frac{\overline{MB}}{\overline{NB}}=\frac{\overline{MB}}{\sin(\angle BON)}=\frac{\overline{MB}}{\sin(۱۸۰^\circ-b)}=\frac{\overline{MB}}{\sin b}$$

در مثلث قائم‌الزاویهٔ BMN : $\frac{\overline{MK}}{\overline{ND}}=\frac{\overline{KB}}{\overline{DB}}$

امـا $\cos a=\frac{\overline{KB}}{\overline{DB}}$ و از مثلث قائم‌الزاویهٔ DNO نتیجه می‌شود که $tg a=\frac{\overline{ND}}{\overline{ON}}$ و اما

$$\overline{ON}=\cos(\angle BON)=\cos(۱۸۰^\circ-b)=-\cos b$$

وبنابراین $\overline{MK}=\cos\alpha\times\overline{ND}$ ویا $\overline{MK}=\cos\alpha\cdot tg\alpha\times\overline{ON}$

ویا $\overline{MK}=\sin\alpha\times(-\cos b)$

و در نتیجه: $\sin(a+b)=\cos a\cdot\sin b-\sin a\cdot(-\cos a)=\cos a\cdot\sin b+\sin a\cdot\cos b$

اگر صورت و مخرج کسر طرف دوم تساوی را بـر $\cos a.\cos b$ تقسیـم کنیم نتیجه می‌شود :

$$tg(a+b)=\frac{\frac{\sin a\cos b}{\cos a\cos b}+\frac{\cos a\cdot\sin b}{\cos a\cdot\cos b}}{\frac{\cos a\cdot\cos b}{\cos a\cdot\cos b}-\frac{\sin a\sin b}{\cos a\cos b}}=\frac{tg a+tg b}{۱-tg a\cdot tg b}$$

$$\boxed{tg(a+b)=\frac{tga+tgb}{۱-tga.tgb}}\qquad (III)$$

ت ـ محاسبهٔ $cotg(a+b)$: $cotg(a+b)$ عکس $tg(a+b)$ است و می‌توان نوشت :

$$cotg(a+b)=\frac{۱}{tg(a+b)}=\frac{۱-tga\cdot tgb}{tga+tgb}$$

برای محاسبهٔ $cotg(a+b)$ از روی $cotga$ و $cotgb$ می‌توان چنین نوشت

$$cotg(a+b)=\frac{۱-\frac{۱}{cotga}\cdot\frac{۱}{cotgb}}{\frac{۱}{cotga}+\frac{۱}{cotgb}}=\frac{cotga\cdot cotgb-۱}{cotgb+cotga}$$

$$\boxed{cotg(a+b)=\frac{cotga cotgb-۱}{cotgb+cotga}}\qquad (IV)$$

(۲-۶)ـ محاسبهٔ نسبتهای مثلثاتی تفاضل دو زاویه

الف ـ محاسبهٔ $sin(a-b)$: اگر در اتحاد (I) b را به $-b$ تبدیل کنیم داریم:

$$sin[a+(-b)]=sina\cdot cos(-b)+cosa\cdot sin(-b)$$

اما $cos(-b)=cosb$ و $sin(-b)=-sinb$ بنابراین :

$$\boxed{sin(a-b)=sina\cdot cosb-cosa\cdot sinb}\qquad (V)$$

ب ـ محاسبهٔ $cos(a-b)$: در اتحاد (II) b را به $-b$ تبدیل می‌کنیم داریم :

$$cos[a+(-b)]=cosa\cdot cos(-b)-sina\cdot sin(-b)$$

و یا

$$\boxed{cos(a-b)=cosa\cdot cosb+sina\cdot sinb}\qquad (VI)$$

پ ـ محاسبهٔ $tg(a-b)$: در اتحاد (III) b را به $-b$ تبدیل می‌کنیم داریم :

$$tg[a+(-b)]=\frac{tga+tg(-b)}{۱-tga\cdot tg(-b)}$$

و یا

$$\boxed{tg(a-b)=\frac{tga-tgb}{۱+tga\cdot tgb}}\qquad (VII)$$

ت ـ محاسبهٔ $cotg(a-b)$: در اتحاد (IV) b را به $-b$ تبدیل می‌کنیم داریم

$$cotg[a+(-b)]=\frac{cotg\,a\,cotg(-b)-۱}{cotg(-b)+cotg\,a}$$

و یا

$$\boxed{cotg(a-b)=\frac{cotg\,a\cdot cotg\,b+۱}{cotg\,b-cotg\,a}}\quad (VIII)$$

(۶ـ۳)ـ کاربرد فرمولهای محاسبهٔ نسبتهای مجموع و تفاضل دو زاویه

مثال ۱ـ مطلوب است محاسبهٔ $sin\,۱۰۵^\circ$:

حل‌ـ

$$۱۰۵^\circ=۶۰^\circ+۴۵^\circ$$

$$sin\,۱۰۵^\circ=sin(۶۰^\circ+۴۵^\circ)=sin۶۰^\circ\times cos۴۵^\circ+cos۶۰^\circ\times sin۴۵^\circ$$

و یا

$$sin\,۱۰۵^\circ=\frac{\sqrt{۳}}{۲}\times\frac{\sqrt{۲}}{۲}+\frac{۱}{۲}\times\frac{\sqrt{۲}}{۲}=\frac{\sqrt{۶}+\sqrt{۲}}{۴}$$

مثال۲ـ مطلوب است محاسبهٔ $cos\,۱۵^\circ$:

حل‌ـ

$$۱۵^\circ=۴۵^\circ-۳۰^\circ$$

$$cos\,۱۵^\circ=cos(۴۵^\circ-۳۰^\circ)=cos۴۵^\circ\times cos۳۰^\circ+sin۴۵^\circ\times sin۳۰^\circ$$

و یا

$$cos\,۱۵^\circ=\frac{\sqrt{۲}}{۲}\times\frac{\sqrt{۳}}{۲}+\frac{\sqrt{۲}}{۲}\times\frac{۱}{۲}=\frac{\sqrt{۶}}{۴}+\frac{\sqrt{۲}}{۴}=\frac{\sqrt{۶}+\sqrt{۲}}{۴}$$

مثال۳ـ مطلوب است محاسبهٔ $tg\,۱۲۰^\circ$

حل‌ـ

$$۱۲۰^\circ=۶۰^\circ+۶۰^\circ$$

$$tg\,۱۲۰^\circ=tg(۶۰^\circ+۶۰^\circ)=\frac{tg۶۰^\circ+tg۶۰^\circ}{۱-tg۶۰^\circ\times tg۶۰^\circ}=\frac{۲tg۶۰^\circ}{۱-tg^۲۶۰^\circ}=\frac{۲\sqrt{۳}}{۱-۳}=$$

$$=\sqrt{۳}$$

مثال۴ـ درستی تساوی زیر را بررسی کنید:

$$\frac{cotg(۳۲^\circ \text{ و } ۳۵')\times cotg(۲۷^\circ \text{ و } ۲۵')-۱}{cotg(۲۷^\circ \text{ و } ۲۵')+cotg(۳۲^\circ \text{ و } ۳۵')}=\frac{\sqrt{۳}}{۳}$$

حل‌ـ طرف اول رابطه با توجه به فرمول IV چنین نوشته می‌شود:

$$\text{طرف اول}=cotg(۳۲^\circ \text{ و } ۳۵'+۲۷^\circ \text{ و } ۲۵')=cotg۶۰^\circ=\frac{\sqrt{۳}}{۳}$$

مثال۵ — درصورتی که A و B و C زاویه‌های یك مثلث باشند درستی رابطه زیر را

بررسی کنید .

$$tg A + tg B + tg C = tg A \cdot tg B \cdot tg C$$

حل ـ با توجه به‌آن‌که A و B و C زاویه‌های یك مثلث می‌باشند می‌توان نوشت :

$$\angle A + \angle B + \angle C = \pi$$

از رابطهٔ اخیر به جای یکی از زاویه‌ها مقدارآن را برحسب دو زاویهٔ دیگر قرار داده و درستی این اتحاد شرطی را بررسی می‌کنیم

$$\angle A = \pi - (\angle B + \angle C)$$

حال تساوی تانژانت زاویه‌های دو طرف تساوی را می‌نویسیم :

$$tg A = tg[\pi - (B + C)] = -tg(B + C)$$

می‌دانیم $tg(B+C) = \dfrac{tg B + tg C}{1 - tg B \cdot tg C}$ بنابراین :

$$tg A = -\frac{tg B + tg C}{1 - tg B \cdot tg C} \Longrightarrow tg A + tg B + tg C = tg A \cdot tg B \cdot tg C$$

تمرین

۱ـ طرف دوم تساویهای زیر را بنویسید :

الف ـ $\sin(x + \frac{\pi}{3}) = ?$

ب ـ $\cos(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4}) = ?$

پ ـ $tg(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6}) = ?$

ت ـ $cotg(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{4}) = ?$

۲ـ کدام یك از رابطه‌های زیرصحیح است:

(الف) $\sin 75^\circ = \sin 45^\circ + \sin 30^\circ$ (ب) $\sin 15^\circ = \cos 60^\circ - \cos 45^\circ$

(پ) $tg 15^\circ = tg(45^\circ - 30^\circ)$

۳ـ مقدار نسبتهای مثلثاتی برای زوایای زیررا به‌دست آورید:

$\frac{11\pi}{12}$ رادیان و 105° و $\frac{50}{3}$ گراد

۴ــ در صورتی که $\sin\alpha=\frac{۵}{۱۳}$ و $tg\beta=\frac{۳}{۴}$ و زاویه‌های α و β حاده باشند مطلوب است محاسبهٔ هریك از عبارتهای زیر :

(الف) $\sin(\alpha+\beta)$ (ب) $\cos(\alpha-\beta)$ (پ) $tg(\alpha+\beta)\cot g(\alpha-\beta)$

۵ــ اگر x و y دو زاویه حاده بوده و داشته باشیم $x+y=\frac{\pi}{۳}$ و $tgx+tgy=۳-\sqrt{۳}$، دو زاویهٔ y و x را حساب کنید.

۶ــ مطلوب است محاسبهٔ $\sin(a+b+c)$ و $\cos(a-b+c)$ برحسب مقادیر نسبتهای مثلثاتی c و b و a.

۷ــ درستی رابطه‌های زیر را بررسی کنید.

الف ــ $\sin(\frac{۳\pi}{۲}-x)=-\cos x$

ب ــ $\cos(\frac{\pi}{۲}+\theta)=-\sin\theta$

پ ــ $\sin(a+b)+\sin(a-b)=۲\sin a\cos b$

ت ــ $\cos(a-b)-\cos(a+b)=۲\sin a\sin b$

ث ــ $\sin ۲x\cos x-\cos ۲x\sin x=\sin x$

ج ــ $tg\frac{\pi}{۳}\cos x+\sin x=۲\sin(\frac{\pi}{۳}+x)$

چ ــ $\sin(a+b)\sin(a-b)=\sin^۲ a-\sin^۲ b$

ح ــ $tg(a+b)+tg(a-b)=\frac{\sin ۲a}{\cos^۲ a-\sin^۲ b}$

۸ــ اگر x و y حاده بوده و داشته باشیم $tg(x+y)=-۷$ و $\sin y=\frac{۳\sqrt{۱۰}}{۱۰}$ مقادیر نسبتهای مثلثاتی x و y را حساب کنید.

۹ــ اگر $tg(a-b)=\frac{۱۱}{۱۳}$ و $tg(a+b)=\frac{۱}{۱۷}$، مقدارهای $tg۲a$ و $tg۲b$ را حساب کنید.

۱۰ــ اگر در مثلث ABC زاویهٔ A منفرجه باشد ثابت کنید $tgBtgC<۱$ است.

۱۱ــ درستی رابطه‌های زیر را بررسی کنید:

الف ـ (x و y مثبت است) $Arc\sin\frac{x^۲-y^۲}{x^۲+y^۲}+Arc\sin\frac{۲xy}{x^۲+y^۲}=\frac{\pi}{۲}$

ب ـ $Arc\,tg\frac{۱}{۲}+Arc\,tg\frac{۱}{۳}=\frac{\pi}{۴}$

۱۲ـ از رابطهٔ $Arctgx+Arctgy+Arctgz=\pi$ رابطهٔ $x+y+z=xyz$ را نتیجه بگیرید.

۱۳ـ از رابطهٔ $Arctgx+Arctgy+Arctgz=\frac{\pi}{۲}$ رابطهٔ $xy+yz+zx=۱$ را نتیجه بگیرید.

۱۴ـ اگر $A+B=\frac{\pi}{۴}$ باشد درستی تساویهای زیر را بررسی کنید.

(الف) $\sqrt{۲}\sin A=\cos B-\sin B$

(ب) $(۱+tgA)(۱+tgB)=۲$

۱۵ـ معادله‌های زیر را حل کنید:

الف ـ $\cos۴x\cos x-\sin۴x\sin x=\frac{۱}{۴}$

ب ـ $\sin x+\sqrt{۳}\cos x=۱$

پـ $\cos(x+\frac{\pi}{۶})\cos(x-\frac{\pi}{۶})=\frac{۱}{۴}$

تـ $\sin(x+\frac{\pi}{۶})-\cos(x+\frac{\pi}{۳})+\sqrt{۳}(\cos^۲x-\sin^۲x)=۰$

ثـ $\cos(x+\frac{\pi}{۵})\cos(x-\frac{\pi}{۵})=\cos^۲x-\cos^۲۲x$

(۶ـ۴)ـ محاسبهٔ مقادیر نسبتهای مثلثاتی زاویه $۲a$ برحسب مقادیر نسبتهای مثلثاتی زاویه a:

الف ـ محاسبهٔ $\sin۲a$: هرگاه در اتحاد $\sin(a+b)=\sin a.\cos b+\cos a.\sin b$ ، به جای زاویه b، زاویه a را قراردهیم، نتیجه می‌شود:

$$\sin(a+a)=\sin a.\cos a+\cos a.\sin a$$

$$\boxed{\sin 2a = 2\sin a \cos a} \quad (IX)$$ و یا

ب ـ محاسبهٔ $\cos 2a$: دراتحاد $\cos(a+b) = \cos a.\cos b - \sin a \sin b$ ، به جای زاویه b، زاویه a را قرارمی‌دهیم، نتیجه می‌شود:

$$\cos(a+a) = \cos a \cdot \cos a - \sin a \cdot \sin a$$

$$\boxed{\cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a} \quad (X)$$ و یا

اگر دراتحاد X به‌جای $\cos^2 a$، مقدار $1 - \sin^2 a$ و یا به‌جای $\sin^2 a$ مقدار $1 - \cos^2 a$ را قرار دهیم نتیجه می‌شود : $\cos 2a = 1 - \sin^2 a - \sin^2 a = 1 - 2\sin^2 a$

$$\boxed{\cos 2a = 1 - 2\sin^2 a}$$

و $\cos 2a = \cos^2 a - (1 - \cos^2 a) = 2\cos^2 a - 1$

$$\boxed{\cos 2a = 2\cos^2 a - 1}$$

پ ـ محاسبهٔ $tg 2a$: از اتحاد $tg(a+b) = \dfrac{tga + tgb}{1 - tga.tgb}$ باتبدیل زاویه b به زاویه a نتیجه می‌شود:

$$tg(a+a) = \frac{tga + tga}{1 - tga \cdot tga} = \frac{2tga}{1 - tg^2 a}$$

$$\boxed{tg 2a = \frac{2tga}{1 - tg^2 a}} \quad (XI)$$

ت ـ محاسبهٔ $cotg 2a$: به همین طریق می‌توان نتیجه گرفت که :

$$\boxed{cotg 2a = \frac{cotg^2 a - 1}{2cotga}} \quad (XII)$$

تبصرهٔ ۱ - از فرمولهای $\cos 2a = 1 - 2\sin^2 a$ و $\cos 2a = 2\cos^2 a - 1$ می‌توان نتیجه گرفت :

$$\boxed{\sin^2 a = \frac{1-\cos 2a}{2}} \Longrightarrow \boxed{\sin a = \pm\sqrt{\frac{1-\cos 2a}{2}}}$$

$$\boxed{\cos^2 a = \frac{1+\cos 2a}{2}} \Longrightarrow \boxed{\cos a = \pm\sqrt{\frac{1+\cos 2a}{2}}}$$

می‌توان $tg^2 a$ را برحسب $\cos 2a$ نوشت :

$$\frac{\sin^2 a}{\cos^2 a} = \frac{1-\cos 2a}{1+\cos 2a} \Longrightarrow \boxed{tg^2 a = \frac{1-\cos 2a}{1+\cos 2a}}$$

$$\boxed{tg a = \pm\sqrt{\frac{1-\cos 2a}{1+\cos 2a}}}$$

تبصرهٔ ۲- با استفاده از اتحادهای IX و X و XI که مقادیرنسبتهای مثلثاتی زاویه $2a$ را برحسب مقادیرنسبتهای مثلثاتی زاویه a نشان می‌دهد می‌توان مقادیرنسبتهای مثلثاتی هر زاویه را برحسب مقادیر نسبتهای مثلثاتی نصف آن زاویه به دست آورد.

(به جای زاویه $2a$، زاویه x و درنتیجه به جای زاویه a، زاویه $\frac{x}{2}$ قرارداده‌شده‌است)

$$\sin x = 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}$$

$$\cos x = \cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2} = 1 - 2\sin^2\frac{x}{2} = 2\cos^2\frac{x}{2} - 1$$

$$tg x = \frac{2 tg\frac{x}{2}}{1 - tg^2\frac{x}{2}}$$

می‌توان هریك از دو مقدار $\sin x$ و $\cos x$ را برحسب $tg\frac{x}{2}$ نوشت و برای این منظور می‌نویسیم :

(با توجه به‌آن‌که $\cos^2\frac{x}{2} + \sin^2\frac{x}{2} = 1$ است)

$$\sin x = \frac{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}+\sin^2\frac{x}{2}}$$

$$\cos x = \frac{\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}+\sin^2\frac{x}{2}}$$

صورت و مخرج هریك از دو کسر بالا را بر $\cos^2\frac{x}{2}$ تقسیم می‌کنیم ، نتیجه می‌شود:

$$\sin x = \frac{\frac{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}}}{\frac{\cos^2\frac{x}{2}+\sin^2\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}}} = \frac{\frac{2\sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}}}{\frac{\cos^2\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}}+\frac{\sin^2\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}}} = \frac{2\,tg\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}} \Longrightarrow \boxed{\sin x = \frac{2\,tg\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}}}$$

$$\cos x = \frac{\frac{\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}}}{\frac{\cos^2\frac{x}{2}+\sin^2\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}}} = \frac{\frac{\cos^2\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}}-\frac{\sin^2\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}}}{\frac{\cos^2\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}}+\frac{\sin^2\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}}} = \frac{1-tg^2\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}}$$

$$\boxed{\cos x = \frac{1-tg^2\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}}}$$

مثال ۱ــ $\sin 90^\circ$ را از روی مقادیر نسبتهای مثلثاتی 45° حساب کنید:

حل ــ راه اول : استفاده از فرمول $\sin 2a$

$$\sin 90^\circ = \sin(2\times 45^\circ) = 2\sin 45^\circ \times \cos 45^\circ$$

یا

$$\sin 90^\circ = 2 \times \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{4}{4} = 1$$

راه دوم : استفاده ار فرمول $\sin x$ برحسب $tg\frac{x}{2}$:

$$\sin 90^\circ = \frac{2tg45^\circ}{1+tg^2 45^\circ} = \frac{2\times 1}{1+1} = 1$$

مثال۲ - مطلوب است محاسبهٔ $\cos 15^\circ$ از روی $\cos 30^\circ$

حلـ با استفاده از فرمول $\cos^2 a = \frac{1+\cos 2a}{2}$ نتیجه می‌شود:

$$\cos^2 15^\circ = \frac{1+\cos 30^\circ}{2} = \frac{1+\frac{\sqrt{3}}{2}}{2} = \frac{2+\sqrt{3}}{4}$$

و یا

$$\cos 15^\circ = \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}$$

(با توجه به آن‌که $\cos 15^\circ$ مقداری است مثبت)

اما $\sqrt{2+\sqrt{3}}$ را می‌توان چنین نوشت

$$\sqrt{2+\sqrt{3}} = \sqrt{\frac{4+2\sqrt{3}}{2}} = \sqrt{\frac{(\sqrt{3}+1)^2}{2}} = \frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{6}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}$$

و بنابراین:

$$\cos 15^\circ = \frac{\frac{\sqrt{6}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}}{2} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$$

مثال۳ ــ اولاً درستی رابطهٔ $tg\frac{x}{2} = \frac{\sin x}{1+\cos x}$ را بررسی کنید. ثانیاً $tg 22^\circ 30'$ را به وسیلهٔ این فرمول محاسبه کنید.

حلـ اولاً:

$$\text{طرف دوم} = \frac{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{2\cos^2\frac{x}{2}} = \frac{\sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}} = tg\frac{x}{2}$$

ثانیاً :

$$tg(۲۲^\circ و ۳۰') = \frac{\sin ۴۵^\circ}{۱+\cos ۴۵^\circ} = \frac{\frac{\sqrt{۲}}{۲}}{۱+\frac{\sqrt{۲}}{۲}} = \frac{\sqrt{۲}}{۲+\sqrt{۲}} = \frac{\sqrt{۲}(۲-\sqrt{۲})}{۲} = \sqrt{۲}-۱$$

(۶ـ۵)ـ محاسبهٔ مقادیر نسبتهای مثلثاتی زاویه $۳a$ برحسب مقادیر نسبتهای مثلثاتی a

الف ـ محاسبهٔ $\sin ۳a$: برای محاسبهٔ $\sin ۳a$ می‌توان نوشت :

$$\sin ۳a = \sin(۲a+a) = \sin ۲a\cdot\cos a + \cos ۲a\cdot\sin a$$

و یا $\sin ۳a = (۲\sin a\cdot\cos a)\cos a + (۱-۲\sin^۲ a)\sin a = ۲\sin a\cos^۲ a + \sin a -$

$$۲\sin^۳ a = ۲\sin a(۱-\sin^۲ a) + \sin a - ۲\sin^۳ a = ۳\sin a - ۴\sin^۳ a$$

$$\boxed{\sin ۳a = ۳\sin a - ۴\sin^۳ a}$$

ب ـ محاسبهٔ $\cos ۳a$: برای محاسبهٔ $\cos ۳a$ می‌توان نوشت :

$$\cos ۳a = \cos(۲a+a) = \cos ۲a\cdot\cos a - \sin ۲a\cdot\sin a$$

و یا $\cos ۳a = (۲\cos^۲ a - ۱)\cos a - (۲\sin a\cos a)\sin a = ۲\cos^۳ a - \cos a -$

$$۲\sin^۲ a\cos a = ۲\cos^۳ a - \cos a - ۲(۱-\cos^۲ a)\cos a = ۲\cos^۳ a - \cos a -$$

$$۲\cos a + ۲\cos^۳ a = ۴\cos^۳ a - ۳\cos a$$

$$\boxed{\cos ۳a = ۴\cos^۳ a - ۳\cos a}$$

پ ـ محاسبهٔ $tg ۳a$: برای محاسبهٔ $tg ۳a$ می‌توان نوشت:

$$tg ۳a = tg(۲a+a) = \frac{tg ۲a + tg a}{۱ - tg ۲a\cdot tg a}$$

و یا
$$tg ۳a = \frac{\frac{۲ tg a}{۱-tg^۲ a} + tg a}{۱ - \frac{۲ tg a}{۱-tg^۲ a}\times tg a} = \frac{۲ tg a + tg a - tg^۳ a}{۱ - tg^۲ a - ۲ tg^۲ a} = \frac{۳ tg a - tg^۳ a}{۱ - ۳ tg^۲ a}$$

$$\boxed{tg3a = \frac{3tga - tg^3a}{1-3tg^2a}}$$

مثال۱ - $\cos 90^\circ$ را از روی $\cos 30^\circ$ حساب کنید .

حل :

$$\cos 90^\circ = \cos(3\times 30^\circ) = 4\cos^3 30^\circ - 3\cos 30^\circ = 4\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3 - 3\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) =$$

$$4\times\frac{3\sqrt{3}}{8} - \frac{3\sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{2} - \frac{3\sqrt{3}}{2} = 0$$

مثال۲ - معادلهٔ $x^3 - 3\sqrt{3}x^2 - 3x + \sqrt{3} = 0$ را حل کنید .

حل- می‌توان نوشت : $\sqrt{3}(1-3x^2) = 3x - x^3$

و پس از تقسیم دوطرف تساوی بر $1-3x^2$ نتیجه می‌شود :

($1-3x^2 \neq 0$ است زیرا $x=\frac{\sqrt{3}}{3}$ در معادله صدق نمی‌کند)

$$\frac{3x-x^3}{1-3x^2} = \sqrt{3}$$

از مقایسهٔ این کسر با فرمول $tg3a = \frac{3tga - tg^3a}{1-3tg^2a}$ می‌توان قرار داد $x = tga$ و در نتیجه :

$$\frac{3tga - tg^3a}{1-3tg^2a} = \sqrt{3} \Longrightarrow tg3a = \sqrt{3} = tg\frac{\pi}{3}$$

$$3a = k\pi + \frac{\pi}{3} \Longrightarrow a = k\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{9}$$

از رابطهٔ اخیر در ازای $k=0$ و $k=1$ و $k=2$ سه جواب $a=\frac{\pi}{9}$

و $a=\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{9}=\frac{4\pi}{9}$ و $a=\frac{2\pi}{3}+\frac{\pi}{9}=\frac{7\pi}{9}$ و در نتیجه سه جواب متمایز :

$x_1 = tg\frac{\pi}{9}$ و $x_2 = tg\frac{4\pi}{9}$ و $x_3 = tg\frac{7\pi}{9}$ برای معادله حاصل می‌شود که مقدار عددی جوابها با استفاده از جدول مقادیر نسبتهای مثلثاتی چنین است :

$$x_1 = tg\frac{\pi}{9} = tg20^\circ = 0{,}3640$$

$$x_۲ = tg\frac{۴\pi}{۹} = tg۸۰^\circ = ۵/۶۷۱۳$$

$$x_۳ = tg\frac{۷\pi}{۹} = tg۱۴۰^\circ = -tg۴۰^\circ = -۰/۸۳۹۱$$

توجه : در ازای $k=۳$ و $k=۴$ و ... جوابهای دیگری برای $\angle a$ بـه دست می‌آیـد اما معادلهٔ داده شده ریشهٔ دیگری غیر از سه ریشهٔ ذکر شده در بالا نخواهـد داشت زیـرا مثلاً در ازای $k=۳$ داریم :

$$a = \pi + \frac{\pi}{۹} \text{ و } \Longrightarrow tga = tg(\pi + \frac{\pi}{۹}) = tg\frac{\pi}{۹}$$

تمرین

۱ــ در صورتی که $\cos x = \frac{\sqrt{۵}}{۵}$ بـوده و x زاویـهٔ حاده بـاشد مطلوب است محـاسبهٔ نسبتهای مثلثاتی کمان $۲x$.

۲ــ به فرض آن که $\sin x = \frac{-۱}{۳}$ و $\pi < x < \frac{۳\pi}{۲}$ باشد مقادیر نسبتهای مثلثاتی $۲x$ را محاسبه کنید.

۳ــ مقادیر نسبتهای مثلثاتی $\cos ۴x$ و $\sin ۴x$ و $tg ۴x$ را برحسب مقادیر نسبتهای مثلثاتی x محاسبه کنید.

۴ــ اگر $\cos x = \frac{\sqrt{۵}-۱}{۴}$ باشد اولاً $\cos ۴x$ را محاسبه کنید . ثـانیاً به فرض آن که $۰ < x < ۲\pi$ باشد مقدار x را حساب کنید .

۵ــ اگر $\sin x + \cos x = \sqrt{۲}$ بـاشد ، مطلوب است محاسبهٔ $\sin ۲x$ و $\cos ۲x$ از آنجـا مقدار x را به دست آورید .

۶ــ عبارتهای زیر را برحسب $\cos ۲x$ بنویسید.

الف : $۱ + \sin^۲ x$ ب : $\frac{۱ + tg^۲ x}{۱ - tg^۲ x}$ پ: $\sin^۲ x \cos^۲ x$

۷ــ عبارتهای زیر را برحسب $tg\frac{x}{۲}$ بنویسید :

الف : $\frac{۱ + \cos x}{۱ - \cos x}$ ب : $\frac{۲ + \sin x}{۲ - \sin x}$ پ : $tgx + cotgx$

۸ـ درستی رابطه‌های زیر را بررسی کنید:

الف ـ $\cos^4 x - \sin^4 x = \cos 2x$

ب ـ $\dfrac{2}{tgx + cotgx} = \sin 2x$

پ ـ $2\sin^2 a + \cos 2a = 1$

ت ـ $\dfrac{\sin x}{1 + \cos x} = tg\dfrac{x}{2}$

ث ـ $\dfrac{1}{\sin 2x} - \dfrac{1}{tg 2x} = tgx$

ج ـ $cotg\dfrac{x}{2} - tg\dfrac{x}{2} = 2 cotgx$

چ ـ $tg^2(\dfrac{\pi}{4} - a) = \dfrac{1 - \sin 2a}{1 + \sin 2a}$

ح ـ $\sin 6x \sin 2x = \sin^2 4x - \sin^2 2x$

خ ـ $tgx + tg\,(x + \dfrac{\pi}{3}) + tg(x + \dfrac{2\pi}{3}) = 3 tg 3x$

د ـ $4\cos x \cos(\dfrac{\pi}{3} - x)\cos(\dfrac{\pi}{3} + x) = \cos 3x$

ذ ـ $\sin 5x = 16\sin^5 x - 20\sin^3 x + 5\sin x$

ر ـ $\cos 5x = 16\cos^5 x - 20\cos^3 x + 5\cos x$

راهنمایی : $5x = 3x + 2x$

۹ـ معادلات زیر را حل کنید :

الف ـ $\cos(2x - \dfrac{\pi}{3}) + \cos x = 0$

ب ـ $\sin 2x = tgx$

پ ـ $cotgx - tgx = 2\, tg\dfrac{x}{2}$

ت ـ $\cos 2x - 3\cos x + 2 = 0$

ث ـ $\cos x - \sin x = \sqrt{2}\cos 2x$

ج ـ $1 - \cos 2x = \sin 2x$

فصل هفتم

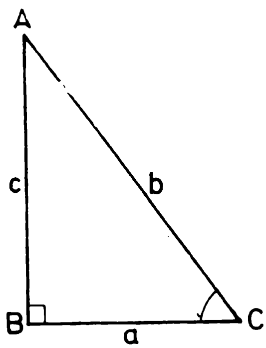
حل مثلث قائم‌الزاویه

(۷-۱)-حل مثلث

مقصود از حل یك مثلث تعیین جزءهای اصلی مجهول از روی معلوم‌های داده شده و استفاده از رابطه‌های مثلثاتی است که بین اندازهٔ ضلعها و نسبتهای مثلثاتی زاویه‌های مثلث وجود دارند. این طریق حل مثلث را که از راه محاسبه انجام می‌شود طریق مثلثاتی حل مثلث می‌گویند. هرمثلث شش جزء اصلی دارد اندازهٔ سه ضلع و اندازهٔ سه زاویهٔ آن. برای حل مثلث قائم‌الزاویه ابتدا رابطه‌هایی را که بین اندازهٔ ضلعها ونسبتهای مثلثاتی زاویه‌ها وجود دارند بررسی می‌کنیم.

(۷-۲)- یادآوری

چنان‌که در فصل دوم دیدید در هرمثلث قائم‌الزاویهٔ $ABC(\angle B = 90^\circ)$(شکل ۴۳) داریم :



(شکل ۴۳)

$$(1)\quad \sin C = \frac{\text{ضلع مقابل به زاویه}}{\text{وتر}} = \frac{c}{b}$$

$$(2)\quad \cos C = \frac{\text{ضلع مجاور به زاویه}}{\text{وتر}} = \frac{a}{b}$$

$$(3)\quad tgC = \frac{\text{ضلع مقابل به زاویه}}{\text{ضلع مجاور به زاویه}} = \frac{c}{a}$$

$$(4)\quad cotgC = \frac{\text{ضلع مجاور به زاویه}}{\text{ضلع مقابل به زاویه}} = \frac{a}{c}$$

همچنین برای نسبتهای مثلثاتی $\angle A$ می‌توان نوشت:

$$(5)\quad \sin A = \frac{a}{b} \quad , \quad (6)\quad \cos A = \frac{c}{b}$$

$$(7)\quad tgA = \frac{a}{c} \quad , \quad (8)\quad cotgA = \frac{c}{a}$$

از آنچه در بالا نوشته شده می‌توان نتیجه‌های زیر را گرفت:

از رابطه‌های (۱) و (۵) نتیجه می‌شود :

$$c=b\cdot\sin C \quad , \quad a=b\cdot\sin A$$

یعنی :

الف ــ در مثلث قائم‌الزاویه اندازهٔ هر ضلع برابر است با حاصل‌ضرب اندازهٔ وتر در سینوس زاویهٔ مقابل به این ضلع.

از رابطه‌های (۲) و (۶) نتیجه می‌شود :

$$a=b\cdot\cos C \quad , \quad c=b\cdot\cos A$$

ب ــ در مثلث قائم‌الزاویه اندازهٔ هر ضلع برابر است با حاصل‌ضرب اندازهٔ وتر در کسینوس زاویهٔ مجاور به این ضلع .

از رابطه‌های (۳) و (۷) نتیجه می‌شود :

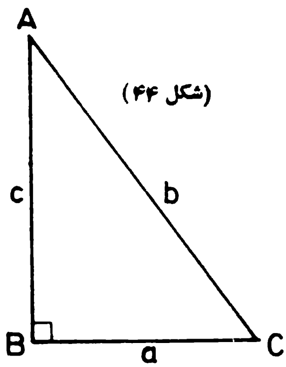
$$c=a\cdot tg C \quad , \quad a=c.tg A$$

پ ــ در مثلث قائم‌الزاویه اندازهٔ هرضلع برابر است با حاصل‌ضرب اندازهٔ ضلع دیگر در تانژانت زاویهٔ مقابل به‌آن ضلع .

از رابطه‌های (۴) و (۸) نتیجه می‌شود :

$$a=c\cdot cotg C \quad , \quad c=a\cdot cotg A$$

ت ــ در مثلث قائم‌الزاویه اندازهٔ هرضلع برابر است با حاصل‌ضرب اندازهٔ ضلع دیگر درکتانژانت زاویهٔ مجاور به‌آن ضلع .



(شکل ۴۴)

(۷-۳)ـ فرمولهای حل مثلث قائم‌الزاویه وحل آن

دورابطه $\angle A+\angle C=90$ و $a^2+c^2=b^2$ با هشت رابطهٔ نسبتهای‌مثلثاتی زاویه‌های A و C که قبلاً دیده شد، ده[1] رابطه تشکیل می‌دهند که فرمولهای حل مثلث قائم‌الزاویه نامیده می‌شوند.

۱ــ باید توجه داشت که این ده رابطه مستقل از یکدیگر نمی‌باشد، به طوری که هر سه رابطهٔ‌متمایز را می‌توان رابطه‌های‌اصلی قرارداد و رابطه‌های دیگر را از روی آن به‌دست‌آورد.

مثلا از سه رابطهٔ $\angle A+\angle C=\frac{\pi}{2}$ و $a=b\sin A$ و $c=b\cdot\cos A$ می‌توان نتیجه‌گرفت،

$$a^2=b^2\sin^2 A \ , \ c^2=b^2\cos^2 a \Longrightarrow a^2+c^2=b^2$$

$$\frac{a}{c}=\frac{b.\sin A}{b\cdot\cos A}=tg A \Longrightarrow a=c\cdot tg A \text{ ویا } a=c\cdot cotg c$$

برای‌حل مثلث قائم‌الزاویه ($\angle B = ۹۰^\circ$) چهار حالت[1] اصلی وجود دارد :

حالت اول- از مثلث قائم‌الزاویه وتر و یك زاویهٔ حاده معلوم است، مثلث را حل کنید.

مثال۱- $AC = b = ۴/۲^{m}$ و $\angle A = ۳۲^\circ$ معلوم می‌باشد جزءهای مجهول را به‌دست آورید ($\angle B = ۹۰$)

حل - جزءهای مجهول عبارتند از $c = ?\ ,\ a = ?\ ,\ \angle C = ?$

$\angle C = ۹۰^\circ - \angle A = ۹۰^\circ - ۳۲^\circ = ۵۸^\circ$

$c = b.\sin C = ۴/۲ \times \sin ۵۸^\circ = ۴/۲ \times ۰/۸۴۸۰ = ۳/۵۶^{m}$

$a = b.\sin A = ۴/۲ \times \sin ۳۲^\circ = ۴/۲ \times ۰/۵۲۹۹ = ۲/۲۲^{m}$

حالت دوم- از مثلث قائم‌الزاویه یك ضلع و یك‌زاویهٔ حاده معلوم‌است، مثلث‌را حل‌کنید:

مثال۲- $BC = a = ۴۵^{cm}$ و $\angle C = ۳۳^\circ$ معلومند؛ جزءهای مجهول را به‌دست‌آورید ($\angle B = ۹۰$)

حل - جزءهای مجهول عبارتند از $c = ?\ ,\ b = ?\ ,\ \angle A$

$\angle A = ۹۰^\circ - \angle C = ۹۰^\circ - ۳۳^\circ = ۵۷^\circ$

$c = a\cot g A = a\cot g ۵۷^\circ = ۴۵^{cm} \times ۰/۶۴۹۴ = ۲۹/۲۲^{cm}$

$$a = b.\sin C \Longrightarrow b = \frac{a}{\sin C} = \frac{۴۵^{cm}}{\sin ۳۳^\circ} = \frac{۴۵^{cm}}{۰/۵۴۴۶} = ۸۰/۹^{cm}$$

حالت سوم- از مثلث قائم‌الزاویه وتر و یك ضلع معلوم است، مثلث را حل‌کنید .

مثال۳- $AC = b = ۲۵^{m}$ ، $AB = c = ۱۶/۰۷^{m}$ معلومند . جزءهای مجهول را به دست آورید ($\angle B = ۹۰^\circ$)

حل - جزءهای مجهول عبارتند از $\angle C = ?\ ,\ \angle A = ?\ ,\ BC = a = ?$

$$\sin C = \frac{c}{b} = \frac{۱۶/۰۷}{۲۵} = ۰/۶۴۲۸ \Longrightarrow \sin C = ۰/۶۴۲۸ \Longrightarrow \angle C = ۴۰^\circ$$

$\angle A = ۹۰^\circ - \angle C = ۹۰^\circ - ۴۰^\circ = ۵۰^\circ$

$a = b.\cos C = ۲۵ \times \cos ۴۰ = ۲۵ \times ۰/۷۶۶$

$a = ۱۹/۱۵^{m}$

حالت چهارم- از مثلث قائم‌الزاویه دوضلع معلوم است، مثلث را حل کنید.

۱- این چهار حالت را حالتهای متعارفی (کلاسیك) حل مثلث قائم‌الزاویه می‌نامند.

مثال ۴- $AB=c=۳۸/۵^{m}$, $BC=a=۵۵^{m}$ معلومند؛ جزءهای مجهول را به دست آورید ($\angle B=۹۰^\circ$).

حل - جزءهای مجهول عبارتند از $\angle C=?$; $\angle A=?$, $AC=b=?$

$$tgC=\frac{c}{a}=\frac{۳۸/۵}{۵۵}=۰/۷$$

$$tg۳۰^\circ=۰/۵۷۷۴$$

$$tg۳۱^\circ=۰/۶۰۰۹$$

چون $۰/۵۷۷۴<۰/۷<۰/۶۰۰۹$ است بنابرایـن $۳۰^\circ<\angle C<۳۱$ می‌باشد

دقیقه‌های زاویهٔ C برابر است با $۶۰'\times\frac{۰/۰۲۲۶}{۰/۰۲۳۵}=۵۷/۷'=۵۷'، ۴۲''$

در نتیجه

$$\angle C=۳۰^\circ\ ,\ ۵۷'\ ,\ ۴۲''$$

$$\angle A=۹۰^\circ-\angle C=۹۰^\circ-(۳۰^\circ,۵۷',۴۲'')=۵۹^\circ,۲',۱۸''$$

$$b^۲=a^۲+c^۲\Longrightarrow b=\sqrt{(۵۵)^۲+(۳۸/۵)^۲}=\sqrt{۴۵۰۷/۲۵}=۶۷/۱۳^{m}$$

تمرین

۱- در این تمرین از مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC ($\angle C=۹۰^\circ$) معلومهایی داده شده است جزء مجهول خواسته شده را به دست آورید.

(الف) $a=?$ $\quad \cos B=\frac{۳}{۵}$, $c=۲۱/۴^{m}$

(ب) $a=?$ $\quad \sin A=\frac{۲۱}{۴۳}$, $c=۱۲/۴۵^{m}$

(پ) $a=?$ $\quad tgA=\frac{۳}{۴}$, $b=۱/۶^{m}$

(ت) $b=?$ $\quad cotgA=\frac{۹}{۱۳}$, $a=۲۶^{cm}$

(ث) $c=?$ $\quad \angle A=۳۲^\circ$, $a=۴۶^{m}$

(ج) $b=۷۲/۶^{\mathrm{m}}$ ، $\cot gB=\frac{۳}{۱۴}$ $\quad c=?$

۲ـ مثلث قائم‌الزاویهٔ $ABC(\angle C=۹۰^{\circ})$ را در هریك از حالتهای زیر حل کنید:

(الف) $c=۰/۸^{\mathrm{m}}$ ، $\angle B=۳۴^{\circ}$ (ب) $b=۰/۹۲^{\mathrm{m}}$ ، $\angle A=۲۴^{\circ}$

(پ) $c=۶/۵^{\mathrm{cm}}$ ، $a=۲/۵^{\mathrm{cm}}$ (ج) $b=\sqrt{۳}$ ، $a=۱$

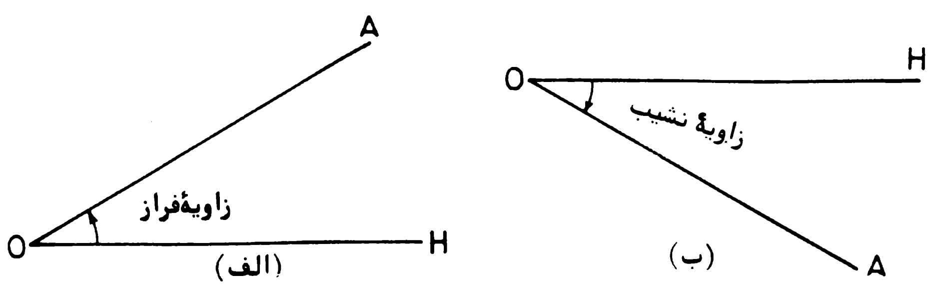
۳ـ نیمدایره‌ای به‌قطر AB داده شده است مماس در نقطهٔ B را براین نیمدایره رسم می‌کنیم و از نقطهٔ A قاطعی می‌کشیم تا نیمدایره را در نقطهٔ C و مماس مزبور را در D قطع کند اگر α زاویهٔ بین قاطع و قطر AB باشد مطلوب است مقدار زاویهٔ α برای آن که $AD=۴AC$.

(۷ـ۴)ـ کاربرد حل مثلث قائم‌الزاویه در تعیین بلندیها وفاصله‌ها

مقصود تعیین بلندی یك نقطه از سطح زمین و تعیین فاصلهٔ دو نقطه است که دسترسی به‌آنها میسر نمی‌باشد .

برای این منظور زاویهٔ فراز و زاویهٔ نشیب را تعریف می‌کنیم .

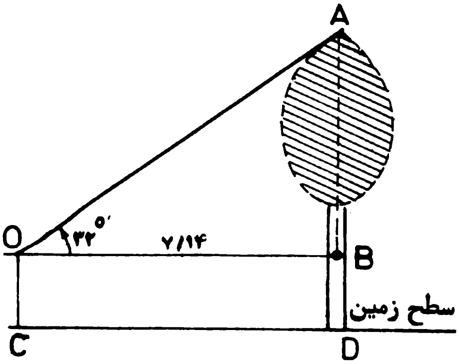
زاویهٔ فراز و زاویهٔ نشیبـ هرگاه چشم ناظر درنقطهٔ O قرارگیرد و نقطهٔ A را نگاه کند نیم‌خط OA با صفحهٔ افقی (صفحهٔ موازی سطح آبهای ساکن‌کم وسعت) H که بر نقطهٔ O می‌گذرد زاویه‌ای پدید می‌آورد. اگر نقطهٔ A بالای صفحهٔ افقی H باشد زاویهٔ حادهٔ HOA زاویهٔ فراز، در صورتی که نقطهٔ A پایین صفحهٔ افقی H باشد زاویهٔ HOA را زاویهٔ نشیب نقطهٔ A از O می‌نامند.



(شکل ۴۵)

راه استفاده از حل مثلث قائم‌الزاویه ـ تعیین بلندیها و فاصله‌ها از حل چند مسئلهٔ زیر معلوم میشود.

مسئله ۱- از نقطهٔ O که از سطح زمین $۱/۲۴^{m}$ ارتفاع دارد زاویهٔ فراز بالاترین نقطهٔ یك درخت ۳۲° است. فاصلهٔ O از درخت (این فاصله در روی خط افقی منظور شده است) برابر با $۷/۱۴^{m}$ می‌باشد، بلندی درخت را تعیین کنید.



(شکل ۴۶)

حل:

$$\text{بلندی درخت} = DB + BA = ۱/۲۴^{m} + BA$$

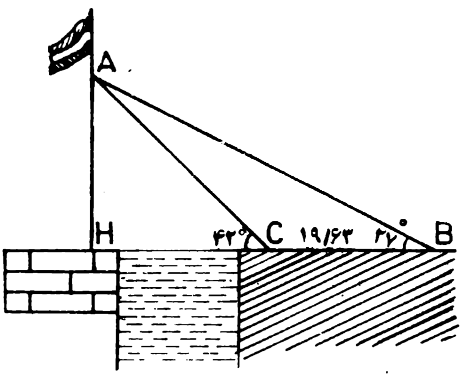
برای تعیین BA در مثلث قائم‌الزاویهٔ OBA می‌توان نوشت:

$$BA = OBtg\angle AOB = OBtg۳۲^\circ$$

$$BA = ۷/۱۴ \times ۰/۶۲۲۹ = ۴/۴۴^{m}$$

$$DA = ۱/۲۴ + ۴/۴۴ = ۵/۶۸^{m}$$

مسئلهٔ ۲ - از نقطهٔ B زاویهٔ فراز سربرجی (زاویهٔ فراز بلندترین نقطهٔ برج) ۲۷° است با حرکت‌کردن به‌طرف برج و پیمودن مسافت $۱۹/۶۳^{m}$ زاویهٔ فراز همان نقطه از برج ۴۲° می‌شود، ارتفاع برج را تعیین کنید.



(شکل ۴۷)

حل- $\text{بلندی برج} = HA = x$

چون $CB = ۱۹/۶۳^{m}$ معلوم‌است، ابتدا هر یك از دو فاصلهٔ HB و HC را برحسب طول مجهول x به‌دست آورده و تفاضل آنها که برابر با مقدار داده شدهٔ CB است می‌نویسیم:

$$\triangle AHB : HB = HA \times cotg\angle HBA = HAcotg۲۷^\circ$$

$$\triangle AHC : HC = HA \times cotg\angle HCA = HAcotg۴۲^\circ$$

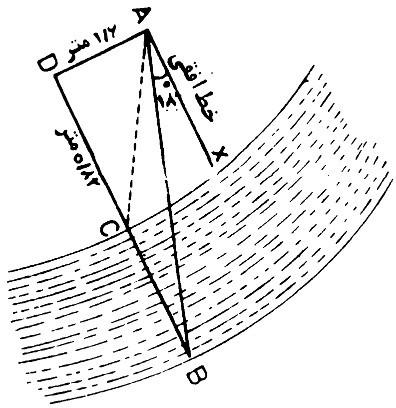
$$HB - HC = HAcotg۲۷^\circ - HAcotg۴۲^\circ = HA(cotg۲۷^\circ - cotg۴۲^\circ)$$

$$CB = HA(cotg۲۷^\circ - cotg۴۲^\circ) \Longrightarrow HA = \frac{۱۹/۶۳}{۱/۹۶۲۶ - ۱/۱۱۰۶} =$$

$$\frac{۱۹/۶۳}{۰/۸۵۳۰} = ۲۳/۰۳^{m}$$

مسئلهٔ ۳- برای تعیین عرض رودخانه‌ای دو نقطهٔ B و C را در دو طرف ساحل آن در نظر گرفته و نقطهٔ D را در روی امتداد BC و نزدیك رودخانه تعیین کرده‌ایم، از نقطهٔ A که در امتداد خط شاقولی مرورکننده بر D و به ارتفاع ۱/۶۰ متر از آن واقع می‌باشد زاویهٔ نشیب نقطهٔ B برابر °۱۸ است.

در صورتی که فاصلهٔ DC برابر با $۰/۸۲^m$ باشد عرض رودخانه را به دست آورید. (ش ۴۷)



(شکل ۴۸)

حل- چون $\angle BAx = ۱۸^\circ$ است بنابراین

$\angle BAD = ۹۰^\circ - \angle BAx = ۹۰^\circ - ۱۸^\circ = ۷۲^\circ$

$\triangle ADB:\ DB = DA \cdot tg(\angle DAB) = ۱/۶۵ \times tg ۷۲^\circ$

$DB = ۱/۶۵ \times ۳/۰۷۷۷ = ۵/۰۵$ متر

عرض رودخانه $= CB = DB - DC = ۵/۰۷ - ۰/۸۲ = ۴/۲۵^m$

تمرین

۱- از نقطهٔ O که به ارتفاع ۱/۳۶ متر از سطح زمین قرار دارد زاویهٔ فراز برجی برابر با °۲۱ است در صورتی که فاصلهٔ نقطه از پای برج ۴۲ متر باشد ارتفاع برج را تعیین کنید.

۲- ارتفاع مناره‌ای ۲۳/۵ متراست. زاویهٔ فراز سر مناره در نقطهٔ A برابر ($۳۲^\circ, ۴۵'$) است. فاصلهٔ نقطهٔ A از پای مناره چند متر است؟

۳- ساختمانی ۱۹/۲۵ متر بلندی دارد در یکی از ساعتهای روز سایهٔ این ساختمان ۱۲/۶۴ متر است زاویهٔ فراز ساختمان چقدر است ؟

۴- در دو نقطهٔ A و B که در دو طرف یك درخت واقع و با پای درخت در روی یك خط راست می‌باشند زاویه‌های فراز سر درخت را اندازه گرفته‌اند به ترتیب $۳۶^\circ, ۲۰'$ و ۴۳° به دست آمده است. فاصله $AB = ۱۱/۶$ متر است ارتفاع درخت چقدر است؟

۵- از نقطهٔ A بالای یك تپه به بلندی ۱۱۲/۴ متر زاویهٔ نشیب دو نقطهٔ B و C از یك ساختمان (این دو نقطه با خط شاقولی که بر نقطهٔ A می‌گذرد در یك صفحه قرار دارند) که در یك طرف نقطهٔ A واقعند به‌ترتیب ۲۹° و $۳۰'$, ۴۷° می‌باشد. فاصلهٔ دو نقطهٔ B و C را به دست آورید.

جدول مقادیر نسبتهای مثلثاتی زاویه‌ها از ۰° تا ۳۰° بایك ده‌هزارم تقریب

اندازهٔ زاویه		sin	cos	tg	cotg
درجه	رادیان				
۰	۰/۰۰۰۰	۰/۰۰۰۰	۱/۰۰۰۰	۰/۰۰۰۰	نامعین
۱	۰/۰۱۷۵	۰/۰۱۷۵	۰/۹۹۹۸	۰/۰۱۷۵	۵۷/۲۹۰
۲	۰/۰۳۴۹	۰/۰۳۴۹	۰/۹۹۹۴	۰/۰۳۴۹	۲۸/۶۳۶
۳	۰/۰۵۲۴	۰/۰۵۲۴	۰/۹۹۸۶	۰/۰۵۲۴	۱۹/۰۸۱
۴	۰/۰۶۹۸	۰/۰۶۹۸	۰/۹۹۷۶	۰/۰۶۹۹	۱۴/۳۰۰
۵	۰/۰۸۷۳	۰/۰۸۷۲	۰/۹۹۶۲	۰/۰۸۷۵	۱۱/۴۳۰
۶	۰/۱۰۴۷	۰/۱۰۴۵	۰/۹۹۴۵	۰/۱۰۵۱	۹/۵۱۴۴
۷	۰/۱۲۲۲	۰/۱۲۱۹	۰/۹۹۲۵	۰/۱۲۲۸	۸/۱۴۴۳
۸	۰/۱۳۹۶	۰/۱۳۹۲	۰/۹۹۰۳	۰/۱۴۰۵	۷/۱۱۵۴
۹	۰/۱۵۷۱	۰/۱۵۶۴	۰/۹۸۷۷	۰/۱۵۸۴	۶/۳۱۳۸
۱۰	۰/۱۷۴۵	۰/۱۷۳۶	۰/۹۸۴۸	۰/۱۷۶۳	۵/۶۷۱۳
۱۱	۰/۱۹۲۰	۰/۱۹۰۸	۰/۹۸۱۶	۰/۱۹۴۴	۵/۱۴۴۶
۱۲	۰/۲۰۹۴	۰/۲۰۷۹	۰/۹۷۸۱	۰/۲۱۲۶	۴/۷۰۴۶
۱۳	۰/۲۲۶۹	۰/۲۲۵۰	۰/۹۷۴۴	۰/۲۳۰۹	۴/۳۳۱۵
۱۴	۰/۲۴۴۳	۰/۲۴۱۹	۰/۹۷۰۳	۰/۲۴۹۳	۴/۰۱۰۸
۱۵	۰/۲۶۱۸	۰/۲۵۸۸	۰/۹۶۵۹	۰/۲۶۷۹	۳/۷۳۲۱
۱۶	۰/۲۷۹۳	۰/۲۷۵۶	۰/۹۶۱۳	۰/۲۸۶۷	۳/۴۸۷۴
۱۷	۰/۲۹۶۷	۰/۲۹۲۴	۰/۹۵۶۳	۰/۳۰۵۷	۳/۲۷۰۹
۱۸	۰/۳۱۴۲	۰/۳۰۹۰	۰/۹۵۱۱	۰/۳۲۴۹	۳/۰۷۷۷
۱۹	۰/۳۳۱۶	۰/۳۲۵۶	۰/۹۴۵۵	۰/۳۴۴۳	۲/۹۰۴۲
۲۰	۰/۳۴۹۱	۰/۳۴۲۰	۰/۹۳۹۷	۰/۳۶۴۰	۲/۷۴۷۵
۲۱	۰/۳۶۶۵	۰/۳۵۸۴	۰/۹۳۳۶	۰/۳۸۳۹	۲/۶۰۵۱
۲۲	۰/۳۸۴۰	۰/۳۷۴۶	۰/۹۲۷۲	۰/۴۰۴۰	۲/۴۷۵۱
۲۳	۰/۴۰۱۴	۰/۳۹۰۷	۰/۹۲۰۵	۰/۴۲۴۵	۲/۳۵۵۹
۲۴	۰/۴۱۸۹	۰/۴۰۶۷	۰/۹۱۳۵	۰/۴۴۵۲	۲/۲۴۶۰
۲۵	۰/۴۳۶۳	۰/۴۲۲۶	۰/۹۰۶۳	۰/۴۶۶۳	۲/۱۴۴۵
۲۶	۰/۴۵۳۸	۰/۴۳۸۴	۰/۸۹۸۸	۰/۴۸۷۷	۲/۰۵۰۳
۲۷	۰/۴۷۱۲	۰/۴۵۴۰	۰/۸۹۱۰	۰/۵۰۹۵	۱/۹۶۲۶
۲۸	۰/۴۸۸۷	۰/۴۶۹۵	۰/۸۸۲۹	۰/۵۳۱۷	۱/۸۸۰۷
۲۹	۰/۵۰۶۱	۰/۴۸۴۸	۰/۸۷۴۶	۰/۵۵۴۳	۱/۸۰۴۰
۳۰	۰/۵۲۳۶	۰/۵۰۰۰	۰/۸۶۶۰	۰/۵۷۷۴	۱/۷۳۲۱

جدول مقادیر نسبتهای مثلثاتی زاویه‌ها از °۳۱ تا °۶۰ با یک ده‌هزارم تقریب

اندازهٔ زاویه — درجه	اندازهٔ زاویه — رادیان	sin	cos	tg	cotg
۳۱	۰/۵۴۱۱	۰/۵۱۵۰	۰/۸۵۷۲	۰/۶۰۰۹	۱/۶۶۴۳
۳۲	۰/۵۵۸۵	۰/۵۲۹۹	۰/۸۴۸۰	۰/۶۲۴۹	۱/۶۰۰۳
۳۳	۰/۵۷۶۰	۰/۵۴۴۶	۰/۸۳۸۷	۰/۶۴۹۴	۱/۵۳۹۹
۳۴	۰/۵۹۳۴	۰/۵۵۹۲	۰/۸۲۹۰	۰/۶۷۴۵	۱/۴۸۲۶
۳۵	۰/۶۱۰۹	۰/۵۷۳۶	۰/۸۱۹۲	۰/۷۰۰۲	۱/۴۲۸۱
۳۶	۰/۶۲۸۳	۰/۵۸۷۸	۰/۸۰۹۰	۰/۷۲۶۵	۱/۳۷۶۴
۳۷	۰/۶۴۵۸	۰/۶۰۱۸	۰/۷۹۸۶	۰/۷۵۳۶	۱/۳۲۷۰
۳۸	۰/۶۶۳۲	۰/۶۱۵۷	۰/۷۸۸۰	۰/۷۸۱۳	۱/۲۷۹۹
۳۹	۰/۶۸۰۷	۰/۶۲۹۳	۰/۷۷۷۱	۰/۸۰۹۸	۱/۲۳۴۹
۴۰	۰/۶۹۸۱	۰/۶۴۲۸	۰/۷۶۶۰	۰/۸۳۹۱	۱/۱۹۱۸
۴۱	۰/۷۱۵۶	۰/۶۵۶۱	۰/۷۵۴۷	۰/۸۶۹۳	۱/۱۵۰۴
۴۲	۰/۷۳۳۰	۰/۶۶۹۱	۰/۷۴۳۱	۰/۹۰۰۴	۱/۱۱۰۶
۴۳	۰/۷۵۰۵	۰/۶۸۲۰	۰/۷۳۱۴	۰/۹۳۲۵	۱/۰۷۲۴
۴۴	۰/۷۶۷۹	۰/۶۹۴۷	۰/۷۱۹۳	۰/۹۶۵۷	۱/۰۳۵۵
۴۵	۰/۷۸۵۴	۰/۷۰۷۱	۰/۷۰۷۱	۱/۰۰۰۰	۱/۰۰۰۰
۴۶	۰/۸۰۲۹	۰/۷۱۹۳	۰/۶۹۴۷	۱/۰۳۵۵	۰/۹۶۵۷
۴۷	۰/۸۲۰۳	۰/۷۳۱۴	۰/۶۸۲۰	۱/۰۷۲۴	۰/۹۳۲۵
۴۸	۰/۸۳۷۸	۰/۷۴۳۱	۰/۶۶۹۱	۱/۱۱۰۶	۰/۹۰۰۴
۴۹	۰/۸۵۵۲	۰/۷۵۴۷	۰/۶۵۶۱	۱/۱۵۰۴	۰/۸۶۹۳
۵۰	۰/۸۷۲۷	۰/۷۶۶۰	۰/۶۴۲۸	۱/۱۹۱۸	۰/۸۳۹۱
۵۱	۰/۸۹۰۱	۰/۷۷۷۱	۰/۶۲۹۳	۱/۲۳۴۹	۰/۸۰۹۸
۵۲	۰/۹۰۷۶	۰/۷۸۸۰	۰/۶۱۵۷	۱/۲۷۹۹	۰/۷۸۱۳
۵۳	۰/۹۲۵۰	۰/۷۹۸۶	۰/۶۰۱۸	۱/۳۲۷۰	۰/۷۵۳۶
۵۴	۰/۹۴۲۵	۰/۸۰۹۰	۰/۵۸۷۸	۱/۳۷۶۴	۰/۷۲۶۵
۵۵	۰/۹۵۹۹	۰/۸۱۹۲	۰/۵۷۳۶	۱/۴۲۸۱	۰/۷۰۰۲
۵۶	۰/۹۷۷۴	۰/۸۲۹۰	۰/۵۵۹۲	۱/۴۸۲۶	۰/۶۷۴۵
۵۷	۰/۹۹۴۸	۰/۸۳۸۷	۰/۵۴۴۶	۱/۵۳۹۹	۰/۶۴۹۴
۵۸	۱/۰۱۲۳	۰/۸۴۸۰	۰/۵۲۹۹	۱/۶۰۰۳	۰/۶۲۴۹
۵۹	۱/۰۲۹۷	۰/۸۵۷۲	۰/۵۱۵۰	۱/۶۶۶۳	۰/۶۰۰۹
۶۰	۱/۰۴۷۲	۰/۸۶۶۰	۰/۵۰۰۰	۱/۷۳۲۱	۰/۵۷۷۴

جدول مقادیر نسبتهای مثلثاتی زاویه‌ها از °۶۱ تا °۹۰ با یک‌ده‌هزارم تقریب

اندازهٔ زاویه		sin	cos	tg	cotg
درجه	رادیان				
۶۱	۱/۰۶۴۷	۰/۸۷۴۶	۰/۴۸۴۸	۱/۸۰۴۰	۰/۵۵۴۳
۶۲	۱/۰۸۲۱	۰/۸۸۲۹	۰/۴۶۹۵	۱/۸۸۰۷	۰/۵۳۱۷
۶۳	۱/۰۹۹۶	۰/۸۹۱۰	۰/۴۵۴۰	۱/۹۶۲۶	۰/۵۰۹۵
۶۴	۱/۱۱۷۰	۰/۸۹۸۸	۰/۴۳۸۴	۲/۰۵۰۳	۰/۴۸۷۷
۶۵	۱/۱۳۴۵	۰/۹۰۶۳	۰/۴۲۲۶	۲/۱۴۴۵	۰/۴۶۶۳
۶۶	۱/۱۵۱۹	۰/۹۱۳۵	۰/۴۰۶۷	۲/۲۴۶۰	۰/۴۴۵۲
۶۷	۱/۱۶۹۴	۰/۹۲۰۵	۰/۳۹۰۷	۲/۳۵۵۹	۰/۴۲۴۵
۶۸	۱/۱۸۶۸	۰/۹۲۷۲	۰/۳۷۴۶	۲/۴۷۵۱	۰/۴۰۴۰
۶۹	۱/۲۰۴۳	۰/۹۳۳۶	۰/۳۵۸۴	۲/۶۰۵۱	۰/۳۸۳۹
۷۰	۱/۲۲۱۷	۰/۹۳۹۷	۰/۳۴۲۰	۲/۷۴۷۵	۰/۳۶۴۰
۷۱	۱/۲۳۹۲	۰/۹۴۵۵	۰/۳۲۵۶	۲/۹۰۴۲	۰/۳۴۴۳
۷۲	۱/۲۵۶۶	۰/۹۵۱۱	۰/۳۰۹۰	۳/۰۷۷۷	۰/۳۲۴۹
۷۳	۱/۲۷۴۱	۰/۹۵۶۳	۰/۲۹۲۴	۳/۲۷۰۹	۰/۳۰۵۷
۷۴	۱/۲۹۱۵	۰/۹۶۱۳	۰/۲۷۵۶	۳/۴۸۷۴	۰/۲۸۶۷
۷۵	۱/۳۰۹۰	۰/۹۶۵۹	۰/۲۵۸۸	۳/۷۳۲۱	۰/۲۶۷۹
۷۶	۱/۳۲۶۵	۰/۹۷۰۳	۰/۲۴۱۹	۴/۰۱۰۸	۰/۲۴۹۳
۷۷	۱/۳۴۳۹	۰/۹۷۴۴	۰/۲۲۵۰	۴/۳۳۱۵	۰/۲۳۰۹
۷۸	۱/۳۶۱۴	۰/۹۷۸۱	۰/۲۰۷۹	۴/۷۰۴۶	۰/۲۱۲۶
۷۹	۱/۳۷۸۸	۰/۹۸۱۶	۰/۱۹۰۸	۵/۱۴۴۶	۰/۱۹۴۴
۸۰	۱/۳۹۶۳	۰/۹۸۴۸	۰/۱۷۳۶	۵/۶۷۱۳	۰/۱۷۶۳
۸۱	۱/۴۱۳۷	۰/۹۸۷۷	۰/۱۵۶۴	۶/۳۱۳۸	۰/۱۵۸۴
۸۲	۱/۴۳۱۲	۰/۹۹۰۳	۰/۱۳۹۲	۷/۱۱۵۴	۰/۱۴۰۵
۸۳	۱/۴۴۸۶	۰/۹۹۲۵	۰/۱۲۱۹	۸/۱۴۴۳	۰/۱۲۲۸
۸۴	۱/۴۶۶۱	۰/۹۹۴۵	۰/۱۰۴۵	۹/۵۱۴۴	۰/۱۰۵۱
۸۵	۱/۴۸۳۵	۰/۹۹۶۲	۰/۰۸۷۲	۱۱/۴۳۰۰	۰/۰۸۷۵
۸۶	۱/۵۰۱۰	۰/۹۹۷۶	۰/۰۶۹۸	۱۴/۳۰۰۰	۰/۰۶۹۹
۸۷	۱/۵۱۸۴	۰/۹۹۸۶	۰/۰۵۲۳	۱۹/۰۸۱۰	۰/۰۵۲۴
۸۸	۱/۵۳۵۹	۰/۹۹۹۴	۰/۰۳۴۹	۲۸/۶۳۶۰	۰/۰۳۴۹
۸۹	۱/۵۵۳۳	۰/۹۹۹۸	۰/۰۱۷۵	۵۷/۲۹۰۰	۰/۰۱۷۵
۹۰	۱/۵۷۰۸	۱/۰۰۰۰	۰/۰۰۰۰	نامعین	۰/۰۰۰۰

مسائل تکمیلی

۱ـ چرخی درهرساعت ۳۰۰۰ دور می‌گردد در یك ثانیه چند رادیان‌طی می‌کند .

۲ـ اگراندازهٔ زاویه‌ای‌برحسب درجه a وبرحسب گراد b باشدبه‌طوری‌که a و $b \in N$ مطلوب است‌کوچکترین مقدار a .

۳ـ تحقیق‌کنید $\forall m \in R$ گزاره‌های $\sin\alpha = \frac{۲m}{۱+m^۲}$ و $\cos\alpha = \frac{۱-m^۲}{۱+m^۲}$ درست است ؟

درستی اتحادهای زیررا ثابت کنید :

۴ـ $(\cos x + \sin x + ۱)(\cos x + \sin x - ۱) = ۲\sin x \cos x$

۵ـ $\sin A \cos A(۱ + tg A)(۱ + cotg A) = (\sin A + \cos A)^۲$

۶ـ $(\sin A + \cos A)\,(tg A + cotg A) = \frac{۱}{\sin A} + \frac{۱}{\cos A}$

۷ـ $\frac{\sin a}{۱ - \cos a} = \frac{۱ + \cos a}{\sin a}$

۸ـ $(\sin B + \cos B)(\frac{۱}{\sin B} - \frac{۱}{\cos B}) = cotg\, B - tg B$

۹ـ اگر $-\frac{\pi}{۴} < x < \frac{\pi}{۴}$ باشد مقدار m را چنان معین‌کنیدکه گزارهٔ $tg x = ۲ - ۳m$ درست باشد $(m \in R)$.

۱۰ـ اگر $۲\pi > y$ و $x > ۰$ باشد از رابطهٔ $\sin(x - y) + \cos(x + y) = ۲$ مقدار x و y را حساب‌کنید .

۱۱ـ اگر $(m \in N)$ باشداز رابطهٔ $\sin\alpha\cos\alpha = \frac{۱}{m}$ تعیین کنید انتهای‌کمان روبرو به زاویه α درکدام ناحیهٔ دایرهٔ مثلثاتی قرار دارد.

انتهای‌کمان روبروبه زاویه x درچه ناحیهٔ دایرهٔ مثلثاتی واقع باشد تا اتحادهای مثلثاتی زیر برقرار باشند:

۱۲ـ $\sqrt{\frac{۱ + \sin x}{۱ - \sin x}} + \sqrt{\frac{۱ - \sin x}{۱ + \sin x}} = -\frac{۲}{\cos x}$

۱۳- $tg x + cotg x = \sqrt{\dfrac{1}{\sin^2 x} + \dfrac{1}{\cos^2 x}}$

اگر α و β زاویه‌های حاده باشند درستی رابطه‌های زیر را ثابت کنید

۱۴- $\sin\alpha + \cos\alpha > 1$

۱۵- $\sin\alpha \cos\alpha \leqslant \dfrac{1}{2}$

۱۶- $tg\beta + cotg\beta > 2$

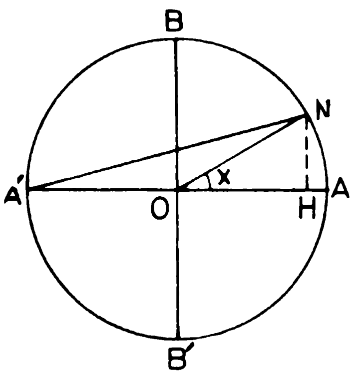
۱۷- $\sin\beta + \cos\beta \leqslant \sqrt{2}$

۱۸- $2 + tg\alpha + tg\beta < \dfrac{2}{\cos\alpha} + \dfrac{2}{\cos\beta}$

۱۹- از رابطهٔ $4 = 3^{\cos^2 x} + 3^{\sin^2 x}$ مقدار زاویه حادهٔ x را حساب کنید.

۲۰- بااستفاده ازشکل روبه‌رودرستی اتحاد زیر را ثابت‌کنید :

$$tg\frac{x}{2} = \frac{\sin x}{1 + \cos x}$$



۲۱- با استفاده ازمسئلهٔ ۲۰ مقادیر نسبتهای مثلثاتی زوایای 15° و $22/5^\circ$ را حساب کنید .

۲۲- ثابت‌کنیدکـه اگریك زاویه ازمثلث قائم‌الزاویه 15° باشد رابطهٔ زیر برقرار است:

$$tg^2 15^\circ + 1 = 4 tg 15^\circ$$

(راهنمایی ـ قبلا ثابت‌کنید در مثلث قائم‌الزاویه‌اگریك زاویه حاده 15° باشد ارتفاع وارد بروتر $\frac{1}{4}$ وتراست)

درستی اتحادهای زیر را ثابت کنید.

۲۳- $\dfrac{tg^2 x - \sin^2 x}{cotg^2 x - \cos^2 x} = tg^6 x$

۲۴- $\dfrac{1}{\cos^6 x} - \dfrac{3 tg^2 x}{\cos^2 x} = 1 + tg^6 x$

۲۵- $\dfrac{\sin^4 x\, tg^2 x}{1 + tg^2 x} + \dfrac{\cos^4 x\, cotg^2 x}{1 + cotg^2 x} = 1 - 3\sin^2 x \cos^2 x$

۲۶- $\dfrac{1 + \sin\alpha}{1 - \sin\alpha} - \dfrac{1 - \sin\alpha}{1 + \sin\alpha} = \dfrac{4 tg\alpha}{\cos\alpha}$

۲۷- $$(۱ + tg\,a + cotg\,a)\left(\frac{۱}{cos\,a} - \frac{۱}{sin\,a}\right) = \frac{sin\,a}{cos^{۲} a} - \frac{cos\,a}{sin^{۲} a}$$

۲۸- $$\left(\frac{۱}{sin\,x} - sin\,x\right)\left(\frac{۱}{cos\,x} - cos\,x\right) = \frac{tg\,x}{۱ + tg^{۲} x}$$

۲۹- $$\frac{sin^{۴} x - cos^{۴} x}{cos^{۲} x} = (tg\,x + ۱)(tg\,x - ۱)$$

۳۰- $$\frac{۱}{sin^{۴} x} + \frac{۱}{tg^{۴} x} = ۱ + \frac{۲cotg^{۲} x}{sin^{۲} x}$$

۳۱- $$\sqrt{\frac{۱ - sin\,x}{۱ + sin\,x}} = \frac{۱}{cos\,x} - tg\,x$$

۳۲- $$\frac{tg^{۳} x}{۱ + tg^{۲} x} + \frac{cotg^{۳} x}{۱ + cotg^{۲} x} = \frac{۱ - ۲sin^{۲} x\,cos^{۲} x}{sin\,x\,cos\,x}$$

۳۳- $$sin^{۸} x + cos^{۸} x + ۴sin^{۲} x\,cos^{۲} x = ۱ + ۲sin^{۴} x\,cos^{۴} x$$

۳۴- $$\frac{sin\,x + cos\,x}{sin\,x - cos\,x} + \frac{۲cos^{۲} x - ۱}{cos^{۲} x(۱ - tg^{۲} x)} = \frac{۲tg\,x}{tg\,x - ۱}$$

۳۵- $$\frac{sin^{۶} x - cos^{۶} x}{۲sin^{۲} x - ۱} = ۱ - sin^{۲} x + sin^{۴} x$$

۳۶- $$\frac{۱}{۳}(cos^{۶} x + sin^{۶} x) - \frac{۱}{۴}(cos^{۲} x - sin^{۲} x)^{۲} = \frac{۱}{۱۲}$$

۳۷- $$cotg^{۲} x\,\frac{sec\,x - ۱}{sin\,x + ۱} + sec^{۲} x.\frac{sin\,x - ۱}{sec\,x + ۱} = ۰$$

۳۸- $$(sin^{۶} x + cos^{۶} x - ۱)^{۳} + ۲۷sin^{۶} x\,cos^{۶} x = ۰$$

۳۹- $$sec^{۲} x + \frac{sin^{۲} x}{۱ + tg^{۲} x} - \frac{cos^{۲} x}{۱ + cotg^{۲} x} - tg^{۲} x = ۱$$

گزاره‌های شرطی زیر راثابت‌کنید : $(\forall x \in R)$

۴۰- با شرط $a\,sin^{۲} x - b\,cos^{۲} x = a - b$

ثابت‌کنید: $$b\,sin^{۴} x + a\,cos^{۴} x = \frac{ab}{a + b}$$

۴۱- با شرط
$$\begin{cases} a = ۳cos\,x + ۴sin\,x \\ b = ۳sin\,x - ۴cos\,x \\ c = ۵tg\,x \end{cases}$$

ثابت کنید : $\sqrt{a^{۲} + b^{۲} + c^{۲}} = ۵|sec\,x|$

۴۲- با شرط $0 < x < \frac{\pi}{2}$ ثابت کنید : $0 < \sin^6 x + \cos^6 x < 1$

۴۳- با شرط $\frac{\sin^4 x}{a} + \frac{\cos^4 x}{b} = \frac{1}{a+b}$ ثابت کنید: $\frac{\sin^8 x}{a^3} + \frac{\cos^8 x}{b^3} = \frac{1}{(a+b)^3}$

۴۴- باشرط

$$P = (1+\cos\alpha)(1+\cos\beta)(1+\cos\gamma) = (1-\cos\alpha)(1-\cos\beta)(1-\cos\gamma)$$

ثابت کنید : $P = |\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma|$

۴۵- باشرط $tg^2 x + cotg^2 x = a$ و $tg^4 x + cotg^4 x = b$ ثابت کنید: $a^2 = b + 2$

در رابطه‌های زیر x را حذف کنید.

۴۶-
$$\begin{cases} cotg x + tg x = a \\ \frac{1}{\cos x} - \cos x = b \end{cases}$$

۴۷-
$$\begin{cases} a \sin^2 x + b\cos^2 x = c \\ (b-c)tg^2 x + (c-a)cotg^2 x = \frac{1}{(c-a)(b-c)} \end{cases}$$

۴۸-
$$\begin{cases} tg x + cotg x = a \\ \frac{1}{\sin x} - \sin x = b \end{cases}$$

۴۹-
$$\begin{cases} tg x + \frac{1}{\sin x} = a \\ \frac{1}{\sin x} - tg x = b \end{cases}$$

۵۰-
$$\begin{cases} m\,tg x + n\,cotg x = a \\ p\,tg x + q\,cotg x = b \end{cases}$$

۵۱- باشرط $\mathrm{cosec}\, x - \sin x = m^3$ و $\sec x - \cos x = n^3$ ثابت کنید:

$m^2 \cdot n^2 (m^2 + n^2) = 1$ و $k \in Z, x \neq \frac{k\pi}{2}$

۵۲- ضریبهای a و b و c را چنان تعیین کنید که گزارهٔ زیر همواره برقرار باشد.

$$\frac{\sin x \cos x}{\sin x + \cos x - 1} = a\sin x + b\cos x + c$$

ریشه‌های معادله‌های زیررا بدست‌آورید. آنها را به ساده‌ترین صورت برحسب نسبتهای مثلثاتی α بنویسید.

۵۳- $x^2 \sin\alpha\cos\alpha + x + \sin\alpha\cos\alpha = 0$

درصورتی‌که α زاویهٔ معلوم فرض شود ، x و y را از دستگاه دو مجهولی زیر برحسب نسبتهای مثلثاتی α به دست‌آورید :

۵۴-
$$\begin{cases} x\,tg\alpha + y\,cotg\alpha = ۲ \\ \dfrac{x}{cotg\alpha} - \dfrac{y}{tg\alpha} = ۰ \end{cases}$$

۵۵- با رسم زاویه‌های ۳۰° و ۴۵° به صورت دو زاویهٔ مجاور درستی نامساوی $sin۷۵^\circ < sin۳۰^\circ + sin۴۵^\circ$ را بررسی‌کنید.

۵۶- در مثلث متساوی‌الساقین ABC $(AB = AC = ۱)$ و $\angle A = ۳۶^\circ$ است نیمساز $\angle C$ را رسم می‌کنیم مقدار عددی $sin۱۸^\circ$ و $cos۳۶^\circ$ را به دست آورید .

۵۷- مقدار A را از رابطهٔ :

$$A = \frac{sin۲۲۵^\circ \times cos۳۰^\circ + cos۱۳۵^\circ \times sin۶۰^\circ}{tg۲۱۰^\circ \times cotg۶۰^\circ + cotg۲۴۰^\circ \times tg۳۳۰^\circ}$$

به دست‌آورید .

۵۸- مقدار عددی عبارت زیر را حساب‌کنید .

$$A = \frac{۲\,sin\frac{۴۹\pi}{۱۰} - sin\frac{۷\pi}{۵} + sin\frac{۱۸\pi}{۵} - ۲\,cos\frac{۳\pi}{۵}}{cos(-\frac{۳\pi}{۵}) + ۲\,cos\frac{۱۳\pi}{۵} - sin\frac{۱۹\pi}{۱۰}}$$

۵۹ - درستی گزاره‌های زیر را بررسی‌کنید :

(الف)
$$\frac{(a^۲ - b^۲)cotg(\pi - \alpha)}{tg(\frac{\pi}{۲} - \alpha)} + \frac{(a^۲ + b^۲)tg(\frac{\pi}{۲} - \alpha)}{cotg(\pi - \alpha)} = -۲a^۲$$

(ب)
$$\frac{۱}{sin(۲۷۰^\circ - a)} + \frac{sin(۹۰۰^\circ - a)}{sin(۶۳۰^\circ - a)} \times tg(۲۷۰^\circ + a) = ۱ - \frac{۱}{cos a}$$

(پ)
$$\frac{۲\,sin\frac{۴۱\pi}{۱۰} + sin(\frac{-\pi}{۱۰}) + sin(\frac{۲۹\pi}{۱۰}) - ۲\,sin\frac{۱۱\pi}{۱۰}}{cos(\frac{-\pi}{۱۰}) \times tg\frac{۱۱\pi}{۱۰} + ۲\,cos\frac{۲\pi}{۵} + sin\frac{۱۹\pi}{۱۰}}$$

(ت)
$$\frac{tg(x + \frac{۷\pi}{۲}) + sin(۷\pi - x) + ۳cos(x - \frac{۱۱\pi}{۲}) + cotg(x - ۸\pi)}{cotg(x - \frac{۵\pi}{۲}) + sin(\frac{۷\pi}{۲} + x) + ۳cos(x - ۱۲\pi) + tg(x - ۷\pi)} = -tg x$$

ث) $\cos\frac{\pi}{n}+\cos\frac{۲\pi}{n}+\dots\dots+\cos\frac{n-۱}{n}\pi=۰ \qquad n\in N$

ج) $\sin\frac{\pi}{k}+\sin\frac{۲\pi}{k}+\dots\dots+\sin\frac{۲k-۱}{k}\pi=۰ \qquad k\in N$

چ) $tg(\frac{۱}{k}۲\pi)+tg(\frac{۲}{k}۲\pi)+\dots\dots+tg(\frac{k-۱}{k}۲\pi)=۰$

۶۰- اگر A و B و C زاویه‌های مثلث باشند درستی گزاره‌های زیر را بررسی کنید:

الف) $\cos A=-\cos(B+C)$

ب) $\sin\frac{۳A}{۲}=-\cos\frac{۳B+۳C}{۲}$

پ) $tg\frac{۳B}{۲}=cotg\frac{۳A+۳C}{۲}$

ت) $\cos۴C=\cos(۴A+۴B)$

ث) $\sin۲A=-\sin(۲B+۲C)$

ج) $\sin(A+\frac{B}{۲})=\cos(\frac{C-A}{۲})$

چ) $\sin(B+\frac{A}{۲})=\cos\frac{C-B}{۲}$

۶۱- درستی گزاره‌های زیر را درمثلث قائم‌الزاویهٔ ABC $(A=۹۰^\circ)$ بررسی کنید.

الف) $\frac{\sin B+\sin C}{\cos B+\cos C}=\sin A$

ب) $\cos A+\cos B=\sin C$

پ) $\frac{\sin B+\cos B}{\sin C+\cos C}=tg\frac{A}{۲}$

ت) $\frac{tgB}{tgC}=\frac{\sin^۲B}{\sin^۲C}$

ث) $\sin A\sin B\sin(A-B)+\sin B\sin C\sin(B-C)+$
$\sin C\sin A\sin(C-A)+\sin(A-B)\sin(B-C)\sin(C-A)=۰$

(راهنمایی: توجه کنید که $\sin B=\cos C$ می‌باشد)

۶۲- اگر $\frac{\pi}{۲}<\varphi<\pi$ باشد ازرابطهٔ: $A=\sqrt{۱+۲\sqrt{\sin^۲\varphi(۱-\sin^۲\varphi)}}$ کدام یك از تساویهای زیر را می‌توان نتیجه گرفت:

(۱) $A=\cos\varphi+\sin\varphi$

(۲) $A=\sin\varphi-\cos\varphi$ (۳) $A=\cos\varphi-\sin\varphi$

$$A = -(\sin\varphi + \cos\varphi) \quad (۴)$$

۶۳- حدود m را چنان‌تعیین کنیدکه تساویهای زیر وقتی‌که α در فاصله‌هـای داده شده قراردارند درست باشد

(الف) $\cos x = \dfrac{۲m+۱}{۲m-۱}$ و $-۶۰^\circ < x < ۶۰^\circ$

(ب) $\operatorname{cotg} x = \dfrac{m-۳}{m^۲-۴}$ و $-\dfrac{\pi}{۴} < x < \dfrac{\pi}{۴}$

(پ) $\cos ۳x = \dfrac{۲m-۳}{m-۲}$ و $\dfrac{-\pi}{۹} < x < \dfrac{\pi}{۹}$

۶۴- عبارتهای زیر را تکمیل کنید:

$$x = \operatorname{Arcsin}\left(\frac{-۲}{۷}\right) \Rightarrow \frac{-۲}{۷} = \dots$$

$$y = \operatorname{Arccos}\left(\frac{-۳}{۸}\right) \Rightarrow -\frac{۳}{۸} = \dots$$

$$z = \operatorname{Arctg}(-۳) \Rightarrow -۳ = \dots$$

$$t = \operatorname{Arccotg}(-۲) \Rightarrow -۲ = \dots$$

۶۵- مطلوبست محاسبهٔ عبارتهای زیر:

$$\sin[\operatorname{Arctg}(-۱)] = ?$$

$$\cos[\operatorname{Arccotg}(\sqrt{۳})] = ?$$

$$\operatorname{tg}[\operatorname{Arccos}(۱)] = ?$$

$$\operatorname{cotg}[\operatorname{Arcsin}(-۱)] = ?$$

$$\sin\left[\operatorname{Arccos}\left(-\frac{۱}{۲}\right) + \operatorname{Arcsin}\left(\frac{-۱}{۲}\right)\right] = ?$$

$$\cos[۲\operatorname{Arccotg} ۰ + \operatorname{Arcsin} ۰] = ?$$

$$\operatorname{tg}\left[۲\operatorname{Arccotg}(-۱) + ۲\operatorname{Arcsin}\left(\frac{\sqrt{۲}}{۲}\right)\right] = ?$$

$$\operatorname{cotg}\left[\operatorname{Arccos}\left(\frac{۱}{۲}\right) + \operatorname{Arcsin}(۱)\right] = ?$$

$$\operatorname{Arcsin}\left(\sin\frac{\pi}{۶}\right) = ?$$

$$\operatorname{Arcsin}\left(\sin\frac{۲\pi}{۳}\right) = ?$$

$$\mathrm{Arc}\cos\left[\cos(-\frac{\pi}{۳})\right]=?$$

$$\mathrm{Arc}\cos(\cos\frac{۷\pi}{۳})=?$$

۶۶- درستی تساویهای زیر را بررسی کنید :

$$\mathrm{Arc}\sin m+\mathrm{Arc}\cos m=\frac{\pi}{۲} \qquad |m|\leqslant ۱$$

$$\mathrm{Arc}tg\frac{۲m}{۱-m^۲}+\mathrm{Arc}cotg\frac{۲m}{۱-m^۲}=\frac{\pi}{۲} \qquad m\in R$$

$$\mathrm{Arc}tg\frac{۲}{۳}+\mathrm{Arc}cotg\frac{-۳}{۲}=\pi$$

$$\mathrm{Arc}tg(\sqrt{۲}-۱)+\mathrm{Arc}tg(\sqrt{۲}+۱)=\frac{\pi}{۲}$$

$$\mathrm{Arc}\sin\frac{۲x}{۱+x^۲}+\mathrm{Arc}\sin\frac{۱-x^۲}{۱+x^۲}=\frac{\pi}{۲}$$

$$\mathrm{Arc}\sin m=\mathrm{Arc}\cos\sqrt{۱-m^۲}$$

با شرط $۰\leqslant m\leqslant ۱$

$$\mathrm{Arc}\cos m=\mathrm{Arc}\sin\sqrt{۱-m^۲}$$

$$\mathrm{Arc}\sin m=-\mathrm{Arc}\cos\sqrt{۱-m^۲}$$

با شرط $-۱\leqslant m\leqslant ۰$

$$\mathrm{Arc}\cos m=\pi-\mathrm{Arc}\sin\sqrt{۱-m^۲}$$

در صورتی که $m>۰$ باشد

$$\mathrm{Arc}tg m=\mathrm{Arc}cotg\frac{۱}{m}$$

$$\mathrm{Arc}tg m+\mathrm{Arc}tg\frac{۱}{m}=\frac{\pi}{۲}$$

در صورتی که $m<۰$ باشد

$$\mathrm{Arc}tg m=\mathrm{Arc}cotg\frac{۱}{m}-\pi$$

$$\mathrm{Arc}cotg m-\mathrm{Arc}tg(-m)=\frac{\pi}{۲}$$

۶۷- اگر $x+y=\frac{\pi}{۴}$ و $tgx\,tgy=\frac{۱}{۶}$ باشد tgx و tgy را حساب کنید (x و y حاده‌اند)

۶۸ - اگر در مثلث ABC داشته باشیم : $\cos C=\frac{\sqrt{۶}+\sqrt{۲}}{۴}$ و $\sin B=\frac{\sqrt{۲}}{۲}$

مطلوب است اندازهٔ زاویهٔ A (دو جواب).

درستی برابریهای زیر را تحقیق کنید.

۶۹- $\cos(\frac{\pi}{۴}-x)\cos(\frac{\pi}{۴}+x)-\sin(\frac{\pi}{۴}-x)\sin(\frac{\pi}{۴}+x)=۰$

۷۰- $\cos\alpha\cos(\alpha-\beta)+\sin\alpha\sin(\alpha-\beta)=\cos\beta$

۷۱- $\sin(۶۰^\circ+x)\cos(۳۰^\circ+x)-\cos(۶۰^\circ+x)\sin(۳۰^\circ+x)=\frac{۱}{۲}$

۷۲- $\sqrt{۲}\sin(x+\frac{\pi}{۴})=\sin x+\cos x$

۷۳- $\cos(a+b)\cos(a-b)=\cos^۲ a-\sin^۲ b$

۷۴- $\sin^۲ a+\sin^۲ b+\cos^۲(a+b)=۱-۲\cos(a+b)\sin a\sin b$

۷۵- $\cot g(a-b)-\cot g(a+b)=\frac{\sin ۲b}{\sin^۲ a-\sin^۲ b}$

۷۶- حداقل و حداکثر مقادیر عبارتهای زیر را به دست‌آورید:

الف) $\sin x+\cos x$

ب) $۳\sin x-\sqrt{۳}\cos x$

۷۷- اگر $tg\gamma=\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\sin(\alpha-\beta)}$ باشد، ثابت کنید $tg\alpha\, \cot g\beta=tg(\frac{۳\pi}{۴}-\gamma)$

۷۸- اگر $x+y+z=k\pi$ باشد درستی برابریهای زیر را بررسی کنید ($k\in Z$).

الف) $tgx+tgy+tgz=tgx\,tgy\,tgz$

ب) $\cot gx\cot gy+\cot gy\cot gz+\cot gz\cot gx=۱$

۷۹- اگر $x+y+z=(۲k+۱)\frac{\pi}{۲}$ باشد درستی برابریهای زیر را بررسی کنید. ($k\in Z$)

الف) $\cot gx+\cot gy+\cot gz=\cot gx\cot gy\cot gz$

ب) $tgx\,tgy+tgy\,tgz+tgz\,tgx=۱$

۸۰- درستی برابری زیر را ثابت کنید:

$$tg(a-b)+tg(b-c)+tg(c-a)=tg(a-b)tg(b-c)tg(c-a)$$

درستی تساویهای زیر را بررسی کنید:

۸۱- $\mathrm{Arc}tg۳+\mathrm{Arc}tg۲=\frac{۳\pi}{۴}$

۸۲- $\mathrm{Arc}\sin\frac{۴}{۵}+\mathrm{Arc}\cos\frac{۲}{\sqrt{۵}}=\mathrm{Arc}\cot g\frac{۲}{۱۱}$

۸۳- $\mathrm{Arc}tg(\frac{a-b}{a+b})^۲+\mathrm{Arc}tg(\frac{۲ab}{a^۲+b^۲})=\frac{\pi}{۴}$

۸۴- $\text{Arcsin}\frac{\sqrt{5}}{5} + \text{Arcsin}\frac{\sqrt{10}}{10} = \frac{\pi}{4}$

۸۵- ثابت کنید از تساویهای :

$$\begin{cases} x + y = a \\ tg\,x + tg\,y = tg\,b \\ cotg\,x + cotg\,y = cotg\,c \end{cases}$$

مـی‌توان نتیجه گرفت :

$$tg\,a\,tg\,b\,tg\,c = tg\,a - tg\,b$$

۸۶- ثابت کنید اگر A و B و C سه‌زاویهٔ مثلثی باشند از تساوی

$$cotg\,A + cotg\,B + cotg\,C = 2$$

می‌توان رابطهٔ $1 + \cos A \cos B \cos C = 2 \sin A \sin B \sin C$ را نتیجه گرفت .

۸۷- ثابت کنید ازدو رابطهٔ

$$\begin{cases} \cos(x + \theta) + \cos(y + \theta) + \cos\theta = 0 \\ \sin(x + \theta) + \sin(y + \theta) + \sin\theta = 0 \end{cases}$$

می‌توان‌دو رابطهٔ $\begin{cases} \cos x + \cos y + 1 = 0 \\ \sin x + \sin y = 0 \end{cases}$ را نتیجه گرفت .

۸۸- ثابت کنیدازرابطهٔ $3\sin(2x + y) = 7\sin y$ می‌توان رابطهٔ $2tg(x + y) = 5tg\,x$ رانتیجه گرفت .

۸۹- از رابطهٔ $tg\,x = tg\frac{\pi}{9}tg\frac{\pi}{18} + tg\frac{\pi}{9}tg\frac{\pi}{3} + tg\frac{\pi}{3}tg\frac{\pi}{18}$ مقدار x را حساب کنید

معادله‌های زیر را حل کنید :

۹۰- $\cos 4x \cos x - \sin 4x \sin x = \frac{1}{2}$

۹۱- $\sin x + \sqrt{3} \cos x = 1$

۹۲- $(\cos x - \sin x)(\cos 2x - \sin 2x) = \frac{1}{2} - \sin 3x$

۹۳- $\sin(x + \frac{\pi}{3})\cos(x - \frac{\pi}{3}) = \frac{\sqrt{3}}{4}$

۹۴- $\cos(x + \frac{\pi}{6})\cos(x - \frac{\pi}{6}) = \frac{1}{4}$

۹۵- $3tg\,x - tg(\frac{\pi}{4} - x) = 3$

۹۶- $tg^2 x = tg(x + 30^\circ)tg(x - 30^\circ)$

۹۷- $\cos^2(120^\circ + x) + \cos^2(120^\circ - x) = \frac{5}{4}$

$$\mathrm{Arc}tg\frac{۲x}{۱-x^{۲}}+۳\,\mathrm{Arc}\cos\frac{۱}{\sqrt{۲}}=۳\,\mathrm{Arc}\sin\frac{\sqrt{۳}}{۲}$$ -۹۸

$$\mathrm{Arc}cotg\,x+\mathrm{Arc}\,cotg\,۲x=\frac{۳\pi}{۴}$$ -۹۹

$$\mathrm{Arc}\sin(۳-\frac{x}{۲})-\mathrm{Arc}\sin x=\mathrm{Arc}\cos x$$ -۱۰۰

$$\mathrm{Arc}tg\frac{x-۱}{x-۲}+\mathrm{Arc}tg\frac{x+۱}{x+۲}=\frac{\pi}{۴}$$ -۱۰۱

$$\mathrm{Arc}tg۲x+\mathrm{Arc}\,tg۳x=\frac{۳\pi}{۴}$$ -۱۰۲

درستی اتحادهای زیررا بررسی کنید:

$$tg(\frac{\pi}{۴}-\frac{x}{۲})=\frac{\cos x}{۱+\sin x}$$ -۱۰۳

$$\frac{۱}{\sin۲x}-\frac{۱}{tg۲x}=tgx$$ -۱۰۴

$$cotg(\frac{\pi}{۴}-x)-cotg(\frac{\pi}{۴}+x)=۲tg۲x$$ -۱۰۵

$$\cos^{۲}(a+b)+\cos^{۲}(a-b)-\cos۲a\cos۲b=۱$$ -۱۰۶

$$\frac{۲\sin x}{\cos x+\cos۲x}=tg۲x-tgx$$ -۱۰۷

$$tg^{۲}۲a-tg^{۲}a=\frac{\sin۳a\sin a}{\cos^{۲}۲a\cos^{۲}a}$$ -۱۰۸

$$\frac{\cos۲x-\cos۴x}{\cos۲x+\cos۴x}=tg۳xtgx$$ -۱۰۹

(راهنمایی: $۴x=۳x+x$ و $۲x=۳x-x$)

$$\frac{۲tg(\frac{\pi}{۴}-a)}{۱-tg^{۲}(\frac{\pi}{۴}-a)}=cotg۲a$$ -۱۱۰

$$\frac{۱-cotg^{۲}(\frac{\pi}{۴}+a)}{۱+cotg^{۲}(\frac{\pi}{۴}+a)}=\sin۲a$$ -۱۱۱

$$۳\sin x\cos۳x+\sin۳x\cos x=۲\sin۴x-\sin۲x$$ -۱۱۲

$$\frac{tg^{۲}۲x}{۲+tg^{۲}۲x}=\frac{۲tg^{۲}x}{۱+tg^{۴}x}$$ -۱۱۳

$$tg۱۰^{\circ}-tg۵۰^{\circ}+tg۷۰^{\circ}=\sqrt{۳}$$ -۱۱۴

$$۴\sin x \sin(\frac{\pi}{۳} - x)\sin(\frac{\pi}{۳} + x) = \sin ۳x$$ -۱۱۵

$$tg x\, tg(\frac{\pi}{۳} - x) tg(\frac{\pi}{۳} + x) = tg ۳x$$ -۱۱۶

$$\sin ۱۰^\circ \sin ۵۰^\circ \sin ۷۰^\circ = \frac{۱}{۸}$$ -۱۱۷

$$\cos ۲۰^\circ \cos ۴۰^\circ \cos ۸۰^\circ = \frac{۱}{۸}$$ -۱۱۸

$$tg ۱۵^\circ tg ۷۵^\circ = ۱$$ -۱۱۹

$$tg ۲۰^\circ tg ۴۰^\circ tg ۱۰۰^\circ = -\sqrt{۳}$$ -۱۲۰

$$tg ۳a\, tg\, a = \frac{tg^۲ ۲a - tg^۲ a}{۱ - tg^۲ a\, tg^۲ ۲a}$$ -۱۲۱

$$(cotg\frac{x}{۲} - tg\frac{x}{۲})^۲(۱ - ۲ tg x\, cotg ۲x) = ۴$$ -۱۲۲

$$\cos^۲ x + \cos^۲(x - \frac{\pi}{۳}) - \cos x \cos(x - \frac{\pi}{۳}) = \frac{۳}{۴}$$ -۱۲۳

$$\text{Arc}tg ۷ + ۲\text{Arc}tg ۳ = \frac{۵\pi}{۴}$$ -۱۲۴

$$۲\text{Arc}cotg\frac{۱}{۲} + \text{Arc}cotg\frac{۱۳}{۹} = \text{Arc}cotg(-۳)$$ -۱۲۵

$$\text{Arc}\cos\frac{\sqrt{۵} - ۱}{۴} + ۲\text{Arc}\sin\frac{\sqrt{۵} + ۱}{۴} = \pi$$ -۱۲۶

$$\text{Arc}tg\frac{۱}{۵} + ۲\text{Arc}tg\frac{۱}{۲} = \text{Arc}tg\frac{۲۳}{۱۱}$$ -۱۲۷

$$۳\text{Arc}tg\frac{۱}{۲} + ۲\text{Arc}tg\frac{۱}{۳} = \pi + \text{Arc}tg(-۲)$$ -۱۲۸

$$۴\text{Arc}tg\frac{۱}{۵} - \text{Arc}tg\frac{۱}{۲۳۹} = \frac{\pi}{۴}$$ -۱۲۹

درهریك از تمرینهای زیر رابطه‌ای مستقل از θ بیابید:

$$\begin{cases} x = ۳\cos\theta + \cos ۳\theta \\ y = ۳\sin\theta - \sin ۳\theta \end{cases}$$ -۱۳۰

$$\begin{cases} x = ۲m\cos\theta + m\cos ۲\theta \\ y = ۲m\sin\theta + m\sin ۲\theta \end{cases}$$ -۱۳۱

$$\begin{cases} x = tg\theta + tg ۲\theta \\ y = cotg\theta + cotg ۲\theta \end{cases}$$ -۱۳۲

۱۳۳- $\begin{cases} x + y = ۳ - \cos ۴\theta \\ x - y = ۴\sin\theta \end{cases}$

۱۳۴- مقدار x را از رابطهٔ $\cot g x = tg ۲۰^\circ + ۲ tg ۴۰^\circ + ۴\cot g ۸۰^\circ$ به‌دست‌آورید.

۱۳۵- مقدار x را از رابطهٔ $\sin x = tg ۱۲^\circ tg ۴۸^\circ tg ۵۴^\circ tg ۷۲^\circ$ به دست‌آورید.

۱۳۶- اگر $\sin x = \frac{۲ab}{a^۲ + b^۲}$ و x زاویهٔ حاده‌ای‌باشد مطلوب‌است محاسبهٔ $tg(\frac{\pi}{۴} - \frac{x}{۲})$.

۱۳۷- مقادیر نسبتهای مثلثاتی y و x را از رابطه‌های زیر به دست آورید:

$$\begin{cases} tg(x - y) = \frac{۱}{۸} \\ tg(x + y) = \frac{۴}{۸} \end{cases}$$

۱۳۸- به فرض این که $\cos\alpha = \frac{x}{y + z}$ و $\cos\beta = \frac{y}{z + x}$ و $\cos\gamma = \frac{z}{x + y}$ باشند ثابت کنید که :

$$tg^۲\frac{\alpha}{۲} + tg^۲\frac{\beta}{۲} + tg^۲\frac{\gamma}{۲} = ۱$$

۱۳۹- اگر $\cos x = \frac{\cos\varphi - e}{۱ - e\cos\varphi}$ باشد ثابت کنید: $tg\frac{x}{۲} = \pm\sqrt{\frac{۱ + e}{۱ - e}}\, tg\frac{\varphi}{۲}$ $۱ > e \geqslant -۱$

۱۴۰- اگر $(۱ + a\cos\alpha)(۱ - a\cos\beta) = ۱ - a^۲$ باشد (۱- و $a \neq ۰$) ثابت کنید :

$$\frac{۱ - a}{۱ + a} = \frac{tg^۲\frac{\beta}{۲}}{tg^۲\frac{\alpha}{۲}}$$

۱۴۱- اگر $۲\cos x = a + \frac{۱}{a}$ باشد ثابت کنید $۲\cos ۳x = a^۳ + \frac{۱}{a^۳}$

معادلات زیر را حل کنید :

۱۴۲- $tg ۲x = ۳ tg x$

۱۴۳- $\sin ۲x + \cos^۲ x = ۰$

۱۴۴- $\cos ۳x = ۴\cos^۲ x$

۱۴۵- $\sin ۳x = ۲\sin x$

۱۴۶- $\cos x + \sin x + tg x - \frac{۱}{\cos x} = ۰$

۱۴۷- $\cos ۳x + ۳\cos x + \sin ۲x = ۰$

۱۴۸- $۲\sqrt{۲}(\sin x + \cos x) = \cot g x - tg x$

۱۴۹- $tg ۳x = tg x + tg ۲x$

۱۵۰- $\sin^{۴} x + \sin^{۴}(\frac{\pi}{۴} + x) = \frac{۱}{۴}$

۱۵۱- $\sin ۵x = ۵\sin x$

۱۵۲- $\cos x + \cos ۲x + \cos ۳x = ۰$

۱۵۳- $\mathrm{Arc}\sin x - \mathrm{Arc}\cos x = \mathrm{Arc}\sin(۳x - ۲)$

۱۵۴- $\mathrm{Arc}\cos x - \mathrm{Arc}\sin x = \mathrm{Arc}\cos x\sqrt{۳}$

۱۵۵- $\mathrm{Arc}tg\, x + \mathrm{Arc}tg(۱ - x) = ۲\,\mathrm{Arc}tg\sqrt{x - x^{۲}}$

۱۵۶- $۲\,\mathrm{Arc}tg(x - ۱) + \mathrm{Arc}tg(x + ۱) = \frac{۳\pi}{۴}$

قیمت در تمام کشور ۹۰ ریال

۱۳۷۰